



**Ю. Н. Карамзин  
А. П. Сухоруков  
В. А. Трофимов**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В НЕЛИНЕЙНОЙ  
ОПТИКЕ**

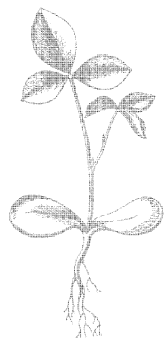
ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

**Ю. Н. Кaramзин**  
**А. П. Сухоруков**  
**В. А. Трофимов**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ  
МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В НЕЛИНЕЙНОЙ  
ОПТИКЕ**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МОСКОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

**1989**



Scan AAW

Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Математическое моделирование в нелинейной оптике. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — 154 с. ISBN 5—211—00336—5.

Монография посвящена проблемам математического моделирования в быстро развивающейся области физики — нелинейной оптике. Приводятся и обосновываются разностные схемы для широкого круга задач нелинейной оптики, в основу построения которых положен принцип консервативности. Особое внимание уделено вопросам математического моделирования компенсации нелинейных искажений световых пучков и разработки алгоритмов оптимального и адаптивного управления. Излагаются результаты численного моделирования, среди которых предсказанные в разное время авторами новые оптические явления.

Для специалистов в области вычислительной математики, нелинейной оптики и акустики, физики твердого тела.

Ил. 8. Табл. 2. Библиогр.: 195 назв.

*Рецензенты: доктор физ.-мат. наук В. М. Головизнин,  
доцент В. А. Алешкевич*

*Печатается по постановлению Редакционно-издательского  
совета Московского университета*

К 1604060000—149 89—89  
077 (02)—89

ISBN 5—211—00336—5

© Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П.,  
Трофимов В. А., 1989 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |    |
|---|----|
| Список основных обозначений .....   | 5  |
| Введение .....  | 8  |
| <b>Глава 1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРО-<br/>МАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ</b> .....                                      | 10 |
| § 1. Квазиоптическое приближение .....  | 10 |
| § 2. Физические постановки и математические модели исследуе-<br>мых задач .....   | 12 |
| § 3. Математическая формулировка исследуемого класса задач.<br>Интегралы движения .....   | 22 |
| § 4. Заключение .....   | 26 |
| <b>Глава 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙ-<br/>НОЙ ОПТИКИ</b> .....  | 28 |
| § 1. Двухслойные консервативные схемы для системы нелиней-<br>ных уравнений Шредингера. Координаты $(z, r)$ .....                         | 29 |
| § 2. Разностные схемы для задач распространения импульсов в<br>нелинейных диспергирующих средах. Координаты $(z, \eta)$ .....             | 32 |
| § 3. Совместный учет дисперсионных эффектов и пространствен-<br>ной неоднородности волновых пакетов. Координаты $(z, r, \eta)$ .....      | 35 |
| § 4. Спектральный метод решения трехмерных стационарных за-<br>дач нелинейной оптики. Координаты $(x, y, z)$ .....                        | 39 |
| § 5. Разностные схемы нестационарных задач прохождения излу-<br>чения в средах с двухфотонным резонансом. Координаты<br>$(z, r, t)$ ..... | 45 |
| § 6. Разностные методы в задачах распространения оптического<br>излучения в облачной среде .....  | 47 |
| § 7. Численное моделирование процесса внутрирезонаторного<br>удвоения частоты оптического излучения .....                                 | 56 |
| § 8. Разностные методы для некоторых задач распространения<br>оптического излучения в химически активной среде .....                      | 63 |
| § 9. Некоторые замечания относительно других численных мето-<br>дов .....   | 65 |
| <b>Глава 3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ОПТИ-<br/>ЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ</b> .....   | 67 |
| § 1. Связанные солитоны и квазисолитоны в средах с квадратич-<br>ной нелинейностью .....  | 67 |
| § 2. Распространение волновых пучков при однофотонном резо-<br>нансе .....  | 75 |
| § 3. Когерентная самофокусировка в средах с двухфотонным<br>резонансом .....  | 77 |
| § 4. Численное моделирование распространения оптического излу-<br>чения в химически активной газовой среде .....                          | 79 |
| § 5. Просветление облачной среды оптическим излучением .....  | 83 |
| § 6. Генерация второй гармоники ограниченными пучками .....   | 85 |
| § 7. Генерация второй гармоники короткими импульсами .....  | 88 |
| § 8. Трехчастотное взаимодействие волновых пучков в средах с<br>квадратичной нелинейностью .....  | 90 |
| § 9. Некоторые выводы и замечания .....   | 93 |

|   |     |
|---|-----|
| <i>Глава 4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНО-ГО И АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ</i> ..... | 94  |
| § 1. Введение .....   | 94  |
| § 2. Критерии качества .....  | 95  |
| § 3. Алгоритмы и параметры (объект) управления .....  | 98  |
| § 4. Модели адаптивного управления .....  | 106 |
| § 5. Основные закономерности автофокусировки пучков .....   | 109 |
| § 6. Аберрационные зеркала .....  | 128 |
| § 7. Подобие и вопросы оптимального управления параметрами световых пучков .....                                | 138 |
| § 8. Заключение и замечания .....   | 142 |
| <i>Литература</i> .....   | 145 |

## Список основных обозначений

|                    |  |
|--------------------|--|
| $E$                | — напряженность электрического поля  |
| $E_j$              | — комплексная амплитуда $j$ -волны   |
| $e$                | — вектор поляризации $j$ -й волны электрического поля  |
| $E_0$              | — пиковая амплитуда пучка  |
| $P$                | — вектор поляризации вещества  |
| $P_{\text{л}}$     | — линейная часть вектора поляризации вещества  |
| $P_{\text{нл}}$    | — нелинейная часть вектора поляризации вещества  |
| $A$                | — безразмерная комплексная амплитуда пучка, нормированная на $E_0$   |
| $z$                | — координата, вдоль которой происходит распространение пучка, нормированная на дифракционную длину $l_d = 2ka^2$ |
| $k$                | — волновое число   |
| $a$                | — начальный радиус пучка   |
| $L$                | — продольная координата, равная $4z$   |
| $x, y$             | — поперечные координаты, нормированные на $a$  |
| $t$                | — время  |
| $x_0, y_0, z_0$    | — безразмерные координаты центра приемной апертуры   |
| $V_x, V_y, V_z$    | — скорость перемещения приемника   |
| $V$                | — скорость движения среды  |
| $\rho$             | — функция, характеризующая оптические свойства приемника   |
| $I(t)$             | — временной профиль импульса   |
| $f$                | — пространственная форма пучка   |
| $Q$                | — норма распределения  |
| $\tau_{\text{и}}$  | — длительность импульса  |
| $\tau_0 = a/V$     | — время пролета среды поперек пучка  |
| $\tau_{\text{к}}$  | — время временной корреляции гауссова закона   |
| $\tau_{\text{ин}}$ | — время инерционности адаптивной системы   |
| $\tau_a$           | — постоянная времени работы адаптивной системы по критерию безразмерной ширины пучка на приемнике                |
| $J_a$              | — функционал ширины пучка на приемнике   |
| $J_I$              | — функционал пиковой интенсивности   |
| $J_p$              | — функционал принимаемой мощности в апертуру радиуса $R_a = R_0/a$   |
| $J_{\text{ц}}$     | — функционал положения центра тяжести пучка  |
| $J_{\text{м}}$     | — функционал $M$ момента распределения поля на приемнике   |
| $J_{\tau}$         | — функционал среднеквадратичного отклонения длительности импульса от ее заданного значения $\tau_a$              |
| $J_t$              | — функционал среднеквадратичного отклонения формы импульса от заданной функции $I(t)$                            |
| $J_{\text{п}}$     | — интеграл перекрытия  |
| $\theta$           | — вектор оптимизируемых параметров   |
| $J_{\theta}$       | — квадратичный функционал от вектора оптимизируемых параметров   |

- $M_0$  — число оптимизируемых параметров (степеней свободы) адаптивной системы  
 $J_\lambda = J + \lambda J_0$ ;  $J$  — один из выше введенных функционалов  
 $\lambda$  — весовой множитель, характеризующий максимально допустимое интегральное отклонение оптимизируемых параметров от их невозмущенных значений  
 $S$  — функция, характеризующая волновой фронт пучка  
 $J_s$  — среднеквадратичное отклонение волнового фронта от плоского значения  $S = 0$   
 $\mathcal{E}_0$  — безразмерная энергия импульса  
 $w$  — плотность энергии импульса  
 $A_r$  — комплексная амплитуда генерируемого пучка  
 $A_c$  — комплексная амплитуда сигнального пучка  
 $A_{об}$  — комплексная амплитуда обращенной волны  
 $P_c$  — мощность сигнала  
 $P_{об}$  — мощность обращенной волны  
 $\theta$  — фокусировка пучка, равная  $ka^2/F$   
 $F$  — фокусное расстояние  
 $\theta^{(x)}$  — наклон волнового фронта, равный  $k\bar{\theta}^{(x)}$   
 $\bar{\theta}^x$  — размерный наклон волнового фронта  
 $\theta_{нл}$  — дополнительная расходимость пучка, вносимая тонким нелинейным слоем  
 $\theta_\alpha$  — дополнительный наклон волнового фронта, вносимый тонким нелинейным слоем  
 $S_{нл}$  — нелинейный фазовый набег  
 $S_\phi$  — фазовый набег, вносимый случайным экраном  
 $S_y$  — управляемый волновой фронт  
 $Q_i$  — ограничения на оптимизируемые параметры  
 $\Phi_{pq}$  — базисные функции  
 $\mathcal{L}$  — линейный оператор, описывающий отклик адаптивной системы, или распространение светового пучка  
 $x_p, y_p$  — координаты приводов возмущений  
 $n$  — номер итерации  
 $a_x$  — радиус пучка по оси  $x$   
 $a_y$  — радиус пучка по оси  $y$   
 $d = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$  — безразмерная ширина пучка  
 $a_0$  — отношение радиуса действия отдельного привода к радиусу пучка  
 $\Psi$  — комплексная амплитуда отраженного от приемника сигнала  
 $\psi$  — комплексная амплитуда, определяемая решением сопряженной задачи  
 $R_a$  — радиус приемной апертуры  
 $\gamma_\phi$  — константа управления в алгоритме фазового сопряжения  
 $\hat{\gamma}$  — матрица в алгоритме управления параметрами пучка  
 $\gamma$  — константа управления фокусировкой  
 $\gamma^{(x)}$  — константа управления наклоном волнового фронта  
 $\alpha$  — коэффициент нелинейной связи в уравнении квазиоптики  
 $\alpha_{нл}$  — коэффициент нелинейной связи в уравнении для безразмерной ширины пучка  
 $I_0$  — максимальное значение интенсивности

- $\kappa$  — функция, характеризующая передающую апертуру
- $R_{pq}$  — коэффициент отражения сегмента
- $M_c$  — число сегментов
- $\tau_{\text{эп}}$  — время запаздывания в оценке критерия качества
- $\tau_{\text{эс}}$  — время запаздывания в определении состояния среды и приемника
- $\tau_I$  — постоянная времени адаптации при настройке системы по критерию пиковой интенсивности
- $f_g$  — гауссовый профиль пучка
- $f_t$  — трубчатый профиль пучка
- $u$  — решение разностной задачи
- $\omega$  — сеточное пространство
- $h_x, h_y$  — шаги сеток по пространственным координатам
- $\tau$  — шаг дискретизации по времени
- $\mu_k$  — собственные функции операторов
- $T$  — безразмерная температура среды
- $W$  — функция, характеризующая водность среды
- $N_j$  — функция, характеризующая концентрацию  $j$ -го вещества
- $\varepsilon_{\text{нл}}$  — нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости вещества
- $\varepsilon'_{\text{нл}}$  — нелинейная добавка к диэлектрической проницаемости вещества для уравнения сопряженной задачи



## Введение

В последние годы сложилась новая методология научных исследований — вычислительный эксперимент и математическое моделирование. Последнее существовало, конечно, и раньше. Однако с появлением мощных ЭВМ оно получило новый импульс и сейчас позволяет решать многие важные задачи, решение которых без применения ЭВМ было бы невозможным. Настоящая книга посвящена математическому моделированию в нелинейной оптике — быстро развивающейся области физики. Монография состоит из нескольких частей, отражающих этапы математического моделирования.

В главе 1 приводятся физические постановки задач, обсуждаются различные приближения, которые обусловлены конкретными условиями распространения пучка, выписываются инварианты взаимодействия оптического излучения с веществом, дается математическая постановка исследуемого класса задач. В этой же главе обсуждаются имеющиеся в литературе возможные подходы к решению задач нелинейной оптики.

Глава 2 посвящена численным методам для данного класса задач. В ней построены разностные схемы и приведены теоремы о сходимости итерационных процессов и теоремы единственности и сходимости решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи. В основу построения численных методов положен принцип консервативности. В заключение обсуждаются предложенные разными авторами численные методы и возможные подходы к построению более эффективных по сравнению с имеющимися сейчас численных методов.

В главе 3 представлены некоторые результаты численных экспериментов, в которых были обнаружены новые нелинейно-оптические эффекты. Естественно, что все результаты проведенных численных экспериментов представить в рамках одной монографии не удалось. Поэтому мы ограничились приведенными ниже примерами, не останавливаясь на таких важных проблемах, как обращение волнового фронта, различные виды рассеяния света, взаимодействие световых пучков сложного пространственного профиля и формирование волноводов. Важно подчеркнуть, что численное моделирование проводилось в сочетании с различными приближениями, в частности с безаберрационным приближением. В этом случае удастся существенно повысить эффективность моделирования.

Последняя глава посвящена математическому моделированию оптимального и адаптивного управления параметрами оптического излучения. Здесь сформулированы задачи оптимизации, записаны алгоритмы оптимального управления, в том числе

с запаздыванием в каналах управления и в получении информации о состоянии среды. Обсуждены проблемы моделирования реальных зеркал. Результаты показывают, насколько важна разработка простых моделей адаптивного управления, правильно отражающих основные закономерности. Особое внимание уделяется имеющимся в настоящее время нерешенным проблемам.

---

## Глава 1

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ МОДУЛИРОВАННЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

### § 1. КВАЗИОПТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ\*

Распространение интенсивных электромагнитных волн в немагнитной ( $\mathbf{B}=\mathbf{H}$ ) среде описывается в рамках классической электродинамики волновым уравнением

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}(\mathbf{E}), \quad (1.1)$$

$c$  — скорость света,  $t$  — время. Свойства среды характеризуются связью между вектором поляризации  $\mathbf{P}$  и напряженностью электрического поля  $\mathbf{E}$ . В общем случае эта связь является функциональной  $\mathbf{P}(\mathbf{E})$  (см., например, [1]).

С учетом временной дисперсии  $i$ -я компонента линейной части вектора поляризации имеет вид

$$(P_n)_i = \int_0^\infty \kappa_{ij}(t') E_j(t-t') dt'. \quad (1.2)$$

Нелинейную часть поляризации можно представить в виде разложения по степеням напряженности электрического поля, так как практически всегда поле лазерного излучения можно считать малым по сравнению с «внутриатомным» полем (параметр разложения  $\mu = E/E_a$ ,  $\mu \ll 1$ ). В этом случае нелинейную часть вектора поляризации можно представить в виде

$$\begin{aligned} (P_{\text{нл}})_i = & \int_0^\infty dt' dt'' \chi_{ijk}(t', t'') E_j(t-t') E_k(t-t'-t'') + \\ & + \int_0^\infty \int_0^\infty dt' dt'' dt''' \theta_{ijkl}(t', t'', t''') E_j(t-t') E_k(t-t'-t'') \times \\ & \times E_l(t-t'-t''-t''') + \dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

Свойства симметрии тензоров линейной и нелинейной восприимчивости  $\kappa_{ij}$ ,  $\chi_{ijk}$ ,  $\theta_{ijkl}$ , ... определяются макроскопическими свойствами среды.

\* Выражения (1.1)—(1.14), (1.23)—(1.40) записаны в физических переменных.

Общее решение волнового уравнения (1.1) совместно с материальными уравнениями (1.2)—(1.3) не представляется возможным. Даже в линейных средах круг задач, допускающих аналитическое решение, весьма ограничен. В связи с этим в теоретической нелинейной оптике были разработаны методы приближенного анализа волновых явлений, учитывающие специфику их протекания в оптическом диапазоне частот.

Перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_\mu}{\partial t^2} = \frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{\text{нл}}}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

где  $\mu$  — малый параметр, характеризующий отличие среды от идеальной — линейной недиссипативной среды, считая среду слабонелинейной и слабопоглощающей. Далее для вывода укороченного уравнения учтем, что оптическое излучение является квазимонохроматическим: световые волны являются почти плоскими. Это позволяет выделить быстроосциллирующую во времени и пространстве часть в функции  $\mathbf{E}$ . Наконец, учтем более медленное изменение амплитуды пучка вдоль оси распространения и во времени, чем по поперечным координатам в силу конечного размера пучка. Резюмируя изложенное выше, представим  $\mathbf{E}$  в следующем виде:

$$\mathbf{E} = \sum_{m=1}^N \mathbf{e}_m A_m(\mu z, \sqrt{\mu} x, \sqrt{\mu} y, \mu t) e^{i(\omega_m t - \mathbf{k}_m \mathbf{r}_m)} + \text{к.с.}, \quad (1.5)$$

$A_m$  — комплексные амплитуды пучков с частотой  $\omega_m$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_m$ ,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор. Запись (1.5) соответствует случаю широких волновых пучков (характерный масштаб пространственной модуляции волны  $a \gg \lambda$ ,  $\lambda$  — длина волны) и протяженных волновых пакетов ( $\tau v \gg \lambda$ ,  $\tau$  — временной масштаб модуляции,  $v$  — скорость света в веществе). Так как факторы, влияющие на модификацию частотного и углового спектров волн (дифракция, дисперсия, диссипация, нелинейность), могут иметь разный порядок малости, то в зависимости от их соотношения упрощенное уравнение для амплитуд имеет различный вид.

После подстановки (1.5) в уравнения Максвелла и материальные уравнения для поляризации среды можно получить укороченные уравнения для комплексных амплитуд [2—5]:

$$\frac{\partial A_m}{\partial z} + \mathcal{L}_m(x, y) A_m + \mathcal{L}_m(\gamma) A_m = F_m(A_1, \dots, A_N, \mathbf{r}, t), \quad (1.6)$$

$$m=1, 2, 3, \dots, N,$$

в которых конкретный вид дифференциальных операторов  $\mathcal{L}_m$  зависит от характера приближения (геометрическая оптика, френелевская дифракция и т. д.), а функции  $F_m$  — от типов взаимодействий и самовоздействий.

В первом приближении укороченное уравнение учитывает направление и величину вектора групповой скорости:

$$\mathcal{L}_m(x, y) \equiv \beta_m \frac{\partial}{\partial x}; \quad \mathcal{L}_m(\eta) \equiv v_m \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad (1.7)$$

где  $\beta_m$  — угол наклона лучевого вектора к оси  $z$ ,  $z$  — направление распространения оптического излучения,  $\beta_m \ll 1$ ,  $v_m = u_m^{-1} - u_1^{-1}$  — расстройка обратных величин групповых скоростей,  $u_m = \partial \omega_m / \partial k_m$ ,  $k_m = |k_m|$ ,  $\eta = t - z/u_1$ .

Второе приближение по малому параметру позволяет учесть дифракцию (квазиоптическое приближение) и дисперсию групповых скоростей:

$$\mathcal{L}_m(x, y) \equiv \beta_m \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2k_m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (1.8)$$

$$\mathcal{L}_m(\eta) \equiv v_m \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 k_m}{\partial \omega_m^2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Правые части (1.6) выражаются через фурье-компоненты нелинейной поляризации:

$$F_m = \frac{2\pi i \omega_m^2}{c^2 k_m \cos \psi_m} P_{\text{нл}}(\omega_m), \quad \text{tg } \psi_m \equiv \beta_m. \quad (1.9)$$

Если считать, что нелинейная среда располагается при  $z > 0$ , то на входе в нее при  $z = 0$  задаются распределения полей:

$$A_m(0, x, y, \eta) = A_m^{(0)}(x, y, t), \quad (1.10)$$

$$m = 1, 2, \dots, N,$$

причем  $A_m^{(0)}(x, y, t)$  обращаются в нуль вне некоторой ограниченной области  $G$ , что означает пространственную и временную ограниченность поля.

## § 2.

### ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТАНОВКИ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИССЛЕДУЕМЫХ ЗАДАЧ

#### 2.1.

#### Распространение световых пучков в средах с кубичной и тепловой нелинейностью

При распространении оптического излучения в средах с кубичной нелинейностью (поляризация пропорциональна напряженности электрического поля в третьей степени) проявляется эффект самовоздействия, связанный с изменением частотного и

углового спектров модулированной волны. В этом случае без учета дисперсионных эффектов второго порядка из системы (1.6) остается одно уравнение типа

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = - \frac{ik}{2\varepsilon_0} \varepsilon_{\text{нл}} |A|^2 A, \quad (1.11)$$

где  $\varepsilon_{\text{нл}} = 2n_0 n_{\text{нл}}$ ,  $n_{\text{нл}}$  — изменение показателя преломления под действием поля распространяющейся волны. Для среды с кубичной нелинейностью  $n_{\text{нл}} = n_2 |A|^2$ .

При распространении оптического излучения в ряде случаев необходимо также учитывать тепловой механизм изменения показателя преломления:

$$n_{\text{нл}} = \frac{\partial n}{\partial T} T. \quad (1.12)$$

Изменение температуры происходит из-за нагрева среды оптическим излучением:

$$V \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} = \chi \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{cn_0 \delta |A|^2}{8\pi \rho c_p}. \quad (1.13)$$

Здесь  $\chi$  — коэффициент температуропроводности,  $\rho c_p$  — теплоемкость единицы объема. Как правило, пренебрегают диффузией тепла вдоль оси распространения ( $\partial^2 T / \partial z^2 = 0$ ). Таким образом, анализ теплового самовоздействия волновых пучков сводится в рассматриваемом приближении к решению системы уравнений [6; 7] (а также [32—37] к гл. 4):

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A = - \frac{ik}{2} \frac{\partial n}{\partial T} T A - \delta A, \quad (1.14)$$

$$\rho c_p \left( V \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \kappa \Delta_{\perp} T + \frac{cn_0 \delta}{8\pi} |A|^2,$$

где  $V$  — скорость бокового движения среды,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $\delta$  — коэффициент линейного поглощения,  $\eta = t - z/u$ ,  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

При прохождении оптическим излучением жидкокапельной среды в ней может формироваться канал повышенной оптической прозрачности — зона просветления [8; 9] — вследствие нагрева капель и их испарения. Такие зоны могут быть использованы для транспортировки световой энергии и оптической связи, а также в задачах локации и зондирования в метеорологии. Для описания нелинейных искажений в движущейся облачной среде оптического излучения в настоящее время широко используются приближение квазиоптики и приближение водности [8—12], когда длина волны излучения много больше размеров отдельных капель. В этом случае среду характеризуют одной

функцией  $W$  — водностью среды. Она показывает массу капель в единице объема. В этом приближении распространение световых пучков описывается следующей системой безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + i\Delta_{\perp} A &= -\tau_d W A - (1 - \beta_T) i\alpha T A, \quad \varphi_T \frac{\partial T}{\partial t} + \chi_T \frac{\partial T}{\partial x} = \\ &= \Delta_{\perp} T + W |A|^2; \quad \varphi_w \frac{\partial W}{\partial t} + \chi_w \frac{\partial W}{\partial x} = \Delta_{\perp} W - \beta_T \gamma W |A|^2. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения для комплексной амплитуды волны учитывает поглощение излучения каплями, второе — тепловое изменение показателя преломления вследствие нагрева капель. В уравнениях теплопроводности и водности учитывается движение среды поперек пучка. Коэффициенты  $\alpha$ ,  $\tau_d$ ,  $\gamma$ ,  $\varphi_T$ ,  $\varphi_w$ ,  $\chi_T$ ,  $\chi_w$  — неотрицательные константы, выражающиеся через физические величины, характеризующие рассматриваемый процесс [41, гл. 4] (см. также ниже).

При наличии сканирования пучка относительная скорость движения среды становится функцией координаты  $z$  [7]. Пусть сканирование происходит в плоскости  $\{x, z\}$ , где координата  $z$ , как и раньше, связана с направлением распространения светового импульса. В практически интересных случаях угол сканирования не превышает нескольких градусов [7]. Это приводит к изменению скорости движения среды относительно пучка, так что вынос капель и тепла из области, занятой оптическим излучением, происходит со скоростью  $V + \omega z$ , где  $\omega$  — угловая скорость сканирования.

Будем рассматривать распространение импульсов малой длительности, когда влиянием диффузии можно пренебречь. Тогда в безразмерных переменных процесс взаимодействия оптического излучения с движущейся облачной средой с учетом теплового самовоздействия и сканирования описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} &= -\tau_d W A - i\alpha(1 - \beta_T) T A, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (1 + \omega z) \frac{\partial T}{\partial x} &= W |A|^2, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + (1 + \omega z) \frac{\partial W}{\partial x} &= -\gamma \beta_T W |A|^2. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Здесь\*  $A$  — нормированная комплексная амплитуда излучения, нормированная на пиковое значение  $E_0$ ,  $W$  — нормированная на ее невозмущенное значение водность среды.

\* Для удобства сохранены прежние обозначения.

Координата  $z$  нормирована на  $l_d = 2ka^2$ ,  $a$  — начальная ширина пучка. Поперечная к направлению распространения координата  $x$  нормирована на  $a$ , время  $t$  — на  $\tau_v$ . Коэффициенты, входящие в уравнения системы (1.16), имеют следующий смысл:  $\tau_d = l_d/l_\tau$ , где  $l_\tau = 8\rho_v/(3B_0W_0)$ ;  $\rho_v$  — плотность воды;  $W_0$  — невозмущенная плотность капель;  $B_0$  — коэффициент, зависящий от длины волны;  $\alpha = \left(4L_T\chi_w\kappa_d\tilde{\gamma}\frac{\partial n}{\partial T}\right) / (3\rho c_p a V)$ ;

$\chi_w$  — коэффициент диффузии капель;  $L_T$  — удельная теплота парообразования;  $\beta_T$  характеризует затраты поглощенной энергии оптического излучения на нагрев окружающей среды;  $\gamma = \tilde{\gamma}\chi_w/(aV)$ ,  $\tilde{\gamma} = P_0/P_w$  — превышение начальной мощности излучения над мощностью, определяющей затраты энергии на испарение;  $P_w = 16\pi^2\chi_w\rho_v L_T/(3B_n)$ ;  $B_n$  — коэффициент,  $\omega = 2ka^2/V > 0$ .

Отсутствие зависимости от координаты  $y$  означает, что рассматриваются «щелевые пучки», у которых один поперечный размер излучателя много больше другого.

В последние годы интерес исследователей привлекает проблема стимулирования химических процессов оптическим излучением [13—19]. Он обусловлен тем, что оптическое излучение позволяет локально изменять характеристики среды, чего достичь традиционными способами бывает трудно или невозможно. При этом различают два способа воздействия на среду. Первый из них заключается в селективном возбуждении какого-либо сорта реагирующих атомов или молекул и изменении тем самым их сечения взаимодействия. Этот метод называется лазерной фотохимией [19]. Второй метод состоит в нагреве заданной области среды и называется лазерной термохимией [15]. Он базируется на хорошо известном факте: скорости химических реакций экспоненциально зависят от температуры среды.

Процесс распространения оптического излучения в нелинейной среде описывается квазиоптическим уравнением, которое в безразмерной форме

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\Delta_\perp A + i\epsilon_{nl}A + \delta A = 0. \quad (1.17)$$

Изменение диэлектрической проницаемости среды  $\epsilon_{nl}$  происходит за счет ее нагрева оптическим излучением, выделения (или поглощения) тепла вследствие происходящих химических процессов, а также из-за изменения состава вещества в процессе реакции. Суммируя вышесказанное, получим следующее выражение для  $\epsilon_{nl}$ :

$$\epsilon_{nl} = \sum_{j=1}^M (\alpha_j T N_j + \beta_j (N_j - N_j^0)), \quad (1.18)$$



а для изменения температуры среды  $T$  в случае неразвитой диффузии и термодиффузии имеем

$$\frac{\partial T}{\partial t} = |A|^2 \sum_{l=1}^M \tilde{\delta}_l N_l + \sum_{j=1}^{M_k} \gamma_j \frac{\partial N_j}{\partial t}, \quad (1.19)$$

где  $\alpha_j$  характеризует в безразмерном виде температурное изменение показателя преломления,  $M$  — число реагентов,  $N_j$  — их концентрации, нормированные на концентрацию смеси, слагаемые  $\beta_j(N_j - N_j^0)$  дают вклад в нелинейную добавку показателя преломления за счет изменения концентрации,  $N_j^0$  — ее начальное значение,  $\tilde{\delta}_j$  характеризует нагрев среды за счет поглощения световой энергии  $j$ -й компонентой, коэффициенты  $\gamma_j$  показывают изменения температуры среды вследствие прохождения химической реакции в  $j$ -м канале,  $M_k \leq M$ . Очевидно, коэффициент поглощения в (1.17) равен

$$\delta = \sum_{j=1}^M \delta_j N_j, \quad (1.20)$$

$\delta_j$  — безразмерный коэффициент поглощения  $j$ -й компоненты газа.

Запишем теперь уравнение для изменения концентраций вещества:

$$\frac{\partial N_j}{\partial t} = \xi_j e^{-\frac{T_{\text{п}}}{T_{\text{н}}+T}} \prod_{l=1}^{M_{\text{п}}} N_l^{m_l} - k_j e^{-\frac{T_0}{T_{\text{н}}+T}} \prod_{s=1}^{M_0} N_s^{n_s}. \quad (1.21)$$

Здесь  $\xi_j$ ,  $k_j$  характеризуют скорость прямой и обратной реакций;  $T_{\text{п}}$ ,  $T_0$  — их энергетические константы;  $M_{\text{п}}$ ,  $M_0$  — соответственно числа требуемых сортов атомов для прямой и обратной реакций;  $m_l$ ,  $n_s$  — требуемые числа атомов данного сорта для осуществления одного акта реакций,  $T_{\text{н}}$  — безразмерная начальная температура среды. Предполагается, что температура всех сортов газов одинакова.

На входе в нелинейную среду задается начальное распределение комплексной амплитуды:

$$A(0, x, y, \eta) = A^{(0)}(x, y, t). \quad (1.22)$$

## 2.2.

### *Двухфотонное поглощение (стационарный случай) и однофотонное поглощение*

При совпадении частоты электромагнитного поля с собственной частотой атомов (или молекул) вещества, когда  $\omega = \omega_{21} + \nu$ ,

происходит однофотонное поглощение или излучение света (однофотонный резонанс). В случае, когда  $2\omega = \omega_{21} + \nu$  ( $\nu$  — малая расстройка), говорят о двухфотонном поглощении (излучении).

Рассмотрим случай квазистационарного распространения через резонансно-поглощающую (излучающую) среду световых импульсов, длительность которых  $\tau_n$  во много раз превышает продольное  $T_1$  и поперечное  $T_2$  времена релаксации среды. Если воспользоваться в этом случае стационарными решениями для матричного элемента матрицы плотности  $\rho_{12}$  и разности населенностей  $N$  состояний 1 и 2 квантовой системы [20], то нетрудно получить следующее уравнение для комплексной амплитуды [21]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A = -i\gamma N_0 T_2 |d_{21}|^2 \hbar^{-1} \frac{i - \theta + p|A|^2(1 - 2T_1/T_2)}{1 + (\theta - p|A|^2)^2 + m_1|A|^2} A \quad (1.23)$$

в случае однофотонного резонанса. Здесь  $k = \omega n_0/c$ ,  $n_0$  — нерезонансный показатель преломления  $\gamma = 2\pi N_a \omega / cn_0$ ,  $N_a$  — плотность атомов,  $N_0$  — равновесная разность населенностей уровней 1 и 2 ( $N_0 = 1$  — пассивная среда,  $N_0 = -1$  — активная среда),  $d_{21}$  — матричный элемент оператора дипольного момента атома,  $\theta = (\omega - \omega_{21})T_2$ ,  $\omega_{21}$  — частота перехода  $p = T_2(\kappa_1 - \kappa_2)/\hbar$ ,  $\kappa_{1,2}$  — линейные поляризуемости уровней 1 и 2 на частоте  $\omega$ ,  $m_1 = 4|d_{21}|^2 T_1 T_2 / \hbar^2$  — параметр насыщения.

При двухфотонном резонансе уравнение для комплексной амплитуды будет отличаться лишь видом нелинейности в правой части [21; 22]:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} A = - \frac{i\gamma v_0 m_2 \hbar}{2T_1} \frac{i - \theta(1 - T_1/T_2)p|A|^2}{1 + (\theta - p|A|^2)^2 + |A|^4} |A|^2 A. \quad (1.24)$$

Здесь  $m_2 = 4r_{12}T_1T_2$  — параметр насыщения двухфотонного перехода,  $r_{12} = \hbar^{-2}$ ,  $\sum_n d_{1n}d_{n2}/(\omega_{n1} - \omega)$ ,  $d_{1n}$  — матричные элементы,  $\theta = (2\omega - \omega_{21})T_2$ .

На входе в нелинейную среду задается начальное распределение полей:

$$A(0, x, y) = A^{(0)}(x, y).$$

### 2.3.

#### *Нестационарный случай двухфотонного резонанса*

Рассмотрим случай вырожденного резонанса, когда  $2\omega = \omega_{21} + \nu$ . Будем считать, что времена продольной и поперечной релаксации  $T_1$  и  $T_2$  сравнимы с длительностью импульса. В этом случае распространение оптического излучения описывается следующей системой уравнений [20]:

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} + \frac{\rho_{12}}{T_2} + i \left( \nu - \frac{x_1 - x_2}{\hbar} |A|^2 \right) \rho_{12} = -i r_{12} |A|^2 N, \quad (1.25)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N - N_0}{T_1} = -4 r_{12} \operatorname{Im} (A^{*2} \rho_{12}), \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{n_0}{c} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2\kappa} \Delta_{\perp} A = & - \frac{i 2\pi \hbar \omega N_a}{n_0 c} \left[ \frac{x_1 - x_2}{2\hbar} \times \right. \\ & \left. \times (N_0 - N) A + 2 r_{12} \rho_{12} A^* \right]. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Здесь  $\rho_{12}$  — недиагональный элемент матрицы плотности. При  $z=0$  задается начальное распределение комплексной амплитуды:

$$A(0, x, y, t) = A^{(0)}(x, y, t). \quad (1.28)$$

При  $t = -\infty$  ставятся граничные условия  $\rho_{12}(z, x, y, -\infty) = 0$ ,  $N(z, x, y, -\infty) = N_0$ , означающие отсутствие первоначального возбуждения среды.

#### 2.4.

##### *Двухфотонный резонанс в присутствии третьей гармоники*

Прохождение оптического импульса через резонансную двухуровневую среду возбуждает, вообще говоря, излучение на утроенной частоте основного поля. Нестационарная картина такого процесса в квазиоптическом приближении описывается системой уравнений, аналогичной системе (1.25) — (1.27), с добавлением одного уравнения для поля на утроенной частоте и соответствующим изменением правых частей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} + \frac{\rho_{12}}{T} + i(\nu - d_1 |A_1|^2 - d_3 |A_3|^2) \rho_{12} = & i(q A_1^2 + \\ & + r A_3 A_1^* e^{i\Delta_{Kz}}) N, \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{N - N_0}{T_1} = -4 \operatorname{Im} [q A_1^{*2} + r A_1 A_3 e^{-i\Delta_{Kz}}] \rho_{12}, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i}{2\kappa_1} \Delta_{\perp} A_1 = & -i\alpha_1 (d_1 (N - N_0) A_1 / 2 + 2q A_1^* \rho_{12} + \\ & + r \rho_{21} A_3 e^{i\Delta_{Kz}}), \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{i}{2\kappa_3} \Delta_{\perp} A_3 = & -i\alpha_3 (d_3 (N - N_0) A_3 / 2 \times \\ & \times r \rho_{12} A_1 e^{-i\Delta_{Kz}}). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Здесь  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  — оператор Лапласа по поперечным к направлению распространения координатам,  $\Delta k = k_3 - 3k_1$ ,  $d_j$ ,  $\alpha_j$  выражаются через известные физические параметры задачи,  $r$  и  $q$  — через частоты и дипольные моменты.

Входные условия для (1.29) — (1.32) имеют тот же вид, что и (1.28) с добавлением  $A_3|_{z=0}=0$ , означающим отсутствие излучения на утроенной частоте на входе в нелинейную среду.

## 2.5.

### *Трехчастотное взаимодействие модулированных волн*

В средах с квадратичной нелинейностью ( $\chi_{ijk} \neq 0$  в (1.3)) возможно распространение трех взаимосвязанных волн, частоты и волновые вектора которых удовлетворяют условиям  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$  и  $k_1 + k_2 = k_3 + \Delta k$ . Фурье-компоненты в правых частях (1.9) находятся в этом случае с помощью представления (1.3). В дальнейшем будет исследоваться трехчастотное взаимодействие в двух приближениях: квазиоптическом и во втором приближении теории дисперсии. В первом случае такой процесс описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \mathcal{L}_1(x, y) A_1 = -i\alpha_1 A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z}, \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \mathcal{L}_2(x, y) A_2 = -i\alpha_2 A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z}, \quad (1.34)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \mathcal{L}_3(x, y) A_3 = -i\alpha_3 A_1 A_2 e^{i\Delta k z}, \quad (1.35)$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3,$$

где операторы  $\mathcal{L}_m$  определяются выражением (1.8), а действительные константы  $\alpha_m$  — физическими параметрами задачи. Для трехчастотного взаимодействия импульсов во втором приближении теории дисперсии операторы  $\mathcal{L}_m(x, y)$  в (1.33) — (1.35) заменяются на  $\mathcal{L}_m(\eta)$  из (1.8). При  $z=0$  (на входе в нелинейную среду) возникает большое разнообразие в способах постановки начальных условий: отсутствие излучения на первой или второй частоте (генерация разностной частоты); нет излучения на частоте  $\omega_3$  (генерация суммарной частоты); усиление слабых сигналов на частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , в поле накачки на частоте  $\omega_3$  и т. д. Весьма важным является случай вырожденного трехчастотного взаимодействия, когда частоты первых двух волн совпадают:  $\omega_1 = \omega_2$ ,  $\omega_3 = 2\omega_1$ ,  $k_3 = 2k_1 + \Delta k$  (в системе (1.33) — (1.35)  $A_1 = A_2$ ). Если излучение на удвоенной частоте на входе в нелинейную среду отсутствует, то говорят о процес-

се генерации второй гармоники (ГВГ). Необходимо также отметить, что вследствие интенсивного нагрева кристалла на процесс генерации второй гармоники могут оказывать существенное влияние тепловые изменения показателей преломления  $\frac{\partial n(\omega_1)}{\partial T}$  и  $\frac{\partial n(\omega_2)}{\partial T}$ . В этом случае в уравнениях для ком-

плексных амплитуд в правых частях появляются дополнительные слагаемые вида  $\frac{ik_1}{2} \frac{\partial n(\omega_1)}{\partial T} T A_1 + \delta_1 A_1$  и  $\frac{ik_2}{2} \frac{\partial n(\omega_2)}{\partial T} \times \times T A_2 + \delta_2 A_2$ , а изменение температуры удовлетворяет второму уравнению в (1.14), где вместо  $\delta|A|^2$  стоит суммарная интенсивность  $\delta_1|A_1|^2 + \delta_2|A_2|^2$ .

## 2.6.

### *Когерентные многочастотные взаимодействия волновых пучков*

Если частоты взаимодействующих в нелинейной среде четырех волн удовлетворяют соотношениям

$$\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \quad (\text{I})$$

или

$$\omega_4 + \omega_1 = \omega_2 + \omega_3, \quad (\text{II})$$

а волновые вектора связаны условиями синхронизма

$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_4 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 \quad (\text{I})$$

или

$$\Delta \mathbf{k} = \mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 \quad (\text{II})$$

и направлены по оси  $z$ , то система уравнений, описывающая такое взаимодействие с учетом дифракции, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_m}{\partial z} + \frac{i}{2k_m} \Delta_{\perp} A_m = & - \frac{i\omega_m}{n(\omega_m)} \left\{ \alpha_m^{(\text{I})} F_m + \right. \\ & \left. + \alpha_m^{(\text{II})} \left( \sum_{s=1}^4 |A_s|^2 - \frac{1}{2} |A_m|^2 \right) A_m \right\}, \quad m = 1 \div 4, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где  $\alpha^{(\text{I})}$  и  $\alpha^{(\text{II})}$  выражаются через физические параметры задачи, а функции  $F_m$  представляются следующим образом:  
для случая I

$$F_m = \begin{cases} A_4 A_2^* A_3^* e^{-i\Delta_{\text{K}z}}, & m=1, \\ A_4 A_1^* A_3^* e^{-i\Delta_{\text{K}z}}, & m=2, \\ A_4 A_1^* A_2^* e^{-i\Delta_{\text{K}z}}, & m=3, \\ A_1 A_2 A_3 e^{i\Delta_{\text{K}z}}, & m=4; \end{cases} \quad (1.37)$$

для случая II

$$F_m = \begin{cases} A_4^* A_2 A_3 e^{i\Delta_{Kz}}, & m=1, \\ A_4 A_3^* A_1 e^{-i\Delta_{Kz}}, & m=2, \\ A_4 A_2^* A_1 e^{-i\Delta_{Kz}}, & m=3, \\ A_1^* A_2 A_3 e^{i\Delta_{Kz}}, & m=4. \end{cases} \quad (1.38)$$

Важным случаем четырехчастотного взаимодействия (I) является процесс взаимодействия, когда частоты первых трех волн совпадают:  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$ ,  $\omega_4 = 3\omega$ . Если на входе в нелинейную среду отсутствует излучение на утроенной частоте, то возникает процесс генерации третьей гармоники. Уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих волн имеют в этом случае вид

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{i}{2\kappa_1} \Delta_{\perp} A_1 = -i\alpha \{ A_3 A_1^{*2} e^{-i\Delta_{Kz}} + \beta(|A_1|^2 + 2|A_3|^2) A_1 \}, \quad (1.39)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + \frac{i}{2\kappa_3} \Delta_{\perp} A_3 = -i\alpha \{ A_1^3 e^{i\Delta_{Kz}} + 3\beta(|A_3|^2 + 2|A_1|^2) A_3 \},$$

$\Delta_K = 3\kappa_1 - \kappa_3$  и  $A_3(0, x, y) = 0$ .

В заключение этого параграфа приведем пример многочастотного взаимодействия волн. Это резонансное взаимодействие произвольного числа волн с частотами, связанными соотношениями

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_q = \omega_{q+1} + \omega_{q+2} + \dots + \omega_N$$

и волновыми векторами

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \dots + \mathbf{k}_q = \mathbf{k}_{q+1} + \dots + \mathbf{k}_N + \Delta\mathbf{k},$$

$$|\Delta\mathbf{k}| \ll \min_{1 \leq j \leq N} |\mathbf{k}_j|.$$

Такой процесс в рассматриваемом нами приближении описывается системой уравнений (1.6), где правые части  $F_m$  выражаются через производные от функции свободной энергии:

$$F_m = -i\alpha_m \frac{\partial U}{\partial A_m^*}, \quad (1.40)$$

$$U = \text{Re} (A_1 A_2 \dots A_q A_{q+1}^* A_{q+2}^* \dots A_N^* e^{-i|\Delta_K|z}),$$

$\alpha_m$  — коэффициенты нелинейной связи.

Отметим, что частным, но весьма важным случаем многочастотного взаимодействия является обращение волнового фронта (ОВФ) светового пучка при четырехволновом взаимодействии (ЧВВ).

### § 3.

#### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ИССЛЕДУЕМОГО КЛАССА ЗАДАЧ. ИНТЕГРАЛЫ ДВИЖЕНИЯ

Перейдем к безразмерным переменным в исследуемых нами задачах, для чего введем новые пространственные и временные независимые переменные (там, где это еще не было сделано), отнормировав физические координаты соответственно на характерные пространственные и временной масштабы задачи. Там, где имеет место тепловое изменение показателя преломления, изменение температуры можно сделать безразмерным с помощью полной входной энергии излучения. В уравнениях (1.25) — (1.27) элемент матрицы плотности и разность населенностей могут быть нормированы на абсолютное значение равновесной разности населенностей.

Итак, в безразмерных переменных большинство рассматриваемых здесь задач сводится к исследованию следующей системы эволюционных уравнений для комплекснозначных функций  $A_m(z, x, y, \eta)$ :

$$\frac{\partial A_m}{\partial z} + \mathcal{L}_m(x, y) A_m + \mathcal{L}_m(\eta) A_m = F_m(A_1, A_2, \dots, A_N, A_1^*, \dots, A_N^*, x, y, z, \eta), \quad m=1, 2, \dots, N. \quad (1.41)$$

Здесь

$$\mathcal{L}_m(x, y) \equiv \beta_m \frac{\partial}{\partial x} + i D_m \Delta_{\perp}, \quad (1.42)$$

$$\mathcal{L}_m(\eta) \equiv \nu_m \frac{\partial}{\partial \eta} + i \tilde{D}_m \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \quad (1.43)$$

Начальные условия имеют вид

$$A_m(0, x, y, \eta) = A_m^{(0)}(x, y, t). \quad (1.44)$$

Физически  $A_m^{(0)}$  являются финитными по всем переменным, так что можно считать, что они обращаются в нуль вне некоторого параллелепипеда со сторонами  $L_x^0, L_y^0, L_z^0$ . Так как мы решаем задачу на конечном по  $z$  отрезке ( $z < L_z$ ) с конечными коэффициентами переноса ( $\beta_m, \nu_m$ ) и коэффициентами дифракционного  $D_m$  и дисперсионного распывания  $\tilde{D}_m$ , то из физических соображений и финитности входных распределений  $A_m^{(0)}$  ясно, что можно выбрать параллелепипед с такими сторонами  $L_x, L_y, L_z$ , вне которого при всех  $z$  решение (1.41) будет нулевым (пространственная и временная ограниченность поля). Поэтому к уравнениям (1.41), (1.44) можно добавить граничные условия

$$\begin{aligned}
A_m(z, L_x, y, \eta) &= A_m(z, 0, y, \eta) = 0, \\
A_m(z, x, L_y, \eta) &= A_m(z, x, 0, \eta) = 0, \\
A_m(z, x, y, L_\eta) &= A_m(z, x, y, 0) = 0
\end{aligned} \tag{1.45}$$

и считать, что вне области  $G = \{(x, y, \eta) : 0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < \eta < L_\eta\}$   $A_m = 0$  при всех  $z < L_z$ . Для большинства из рассматриваемых задач правые части в (1.41) не зависят от временной и пространственных координат и удовлетворяют следующим условиям:

$$1) \quad \operatorname{Re} \left( \sum_{m=1}^N F_m A_m^* \right) = 0; \tag{1.46}$$

2) существуют такие действительные константы  $\varphi_m$ , что

$$\operatorname{Im} \left( \sum_{m=1}^N \varphi_m F_m \nabla A_m^* \right) = \nabla U, \tag{1.47}$$

где  $\nabla = \{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial \eta, \partial/\partial z\}$ ,  $U$  — действительная функция  $2N$  переменных, такая, что

$$\varphi_m F_m = i \frac{\partial U}{\partial A_m^*}, \quad \varphi_m F_m^* = -i \frac{\partial U}{\partial A_m}. \tag{1.48}$$

В этом случае система (1.41) обладает следующими инвариантами — интегралами движения:

$$I_1 = \iiint_G \sum_{m=1}^N |A_m|^2 dx dy d\eta, \tag{1.49}$$

$$I_2 = \iiint_G \sum_{m=1}^N (\varphi_m A_m \nabla A_m^*) dx dy d\eta, \tag{1.50}$$

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right\},$$

$$\begin{aligned}
I_3 = & \iiint_G \left\{ \sum_{m=1}^N \varphi_m \left[ D_m \left( \left| \frac{\partial A_m}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial A_m}{\partial y} \right|^2 \right) + \right. \right. \\
& + \beta_m \operatorname{Im} \left( A_m \frac{\partial A_m^*}{\partial x} \right) + \tilde{P}_m \left| \frac{\partial A_m}{\partial \eta} \right|^2 + \nu_m \operatorname{Im} \left( A_m \frac{\partial A_m^*}{\partial \eta} \right) \Big] + \\
& \left. + U(A_1, A_2, \dots, A_N, A_1^*, \dots, A_N^*) \right\} dx dy d\eta,
\end{aligned} \tag{1.51}$$

т. е.  $dI_s/dz = 0$ ,  $I_s(z) = I_s(0)$ ,  $s = 1, 2, 3$ .



Действительно, если ввести следующее скалярное произведение:

$$(u, v) = \iiint_G uv^* dx dy d\eta,$$

то нетрудно убедиться в том, что операторы  $\mathcal{L}_m(x, y)$  и  $\mathcal{L}_m(\eta)$  являются кососимметричными, т. е.

$$\mathcal{L}_m^*(x, y) = -\mathcal{L}_m(x, y), \quad \mathcal{L}_m^*(\eta) = -\mathcal{L}_m(\eta).$$

Таким образом, если выполнено условие 1), то, умножая уравнения (1.41) скалярно на  $A_m$ , складывая полученные равенства, в силу (1.46) получаем

$$\frac{d}{dz} \sum_{m=1}^N \|A_m\|^2 = 0,$$

т. е.

$$\frac{dI_1}{dz} = 0, \quad \|A_m\|^2 = (A_m, A_m).$$

Пусть теперь выполнены условия 2). Покажем, что система (1.41) обладает инвариантами  $I_2$  и  $I_3$ .

Используя формулы интегрирования по частям, нетрудно проверить, что

$$\operatorname{Im}(\mathcal{L}(x, y) A, v) = \begin{cases} 0, & v = \frac{\partial A}{\partial x}, \\ 0, & v = \frac{\partial A}{\partial y}, \\ 0, & v = \frac{\partial A}{\partial \eta}, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \beta \operatorname{Im} \left( A, \frac{\partial A}{\partial x} \right) + D \|\nabla_{\perp} A\|^2 \right], & v = \frac{\partial A}{\partial z}; \end{cases} \quad (1.52)$$

$$\operatorname{Im}(\mathcal{L}(\eta) A, v) = \begin{cases} 0, & v = \partial A / \partial x, \\ 0, & v = \partial A / \partial y, \\ 0, & v = \partial A / \partial \eta, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \gamma \operatorname{Im} \left( A, \frac{\partial A}{\partial \eta} \right) + \tilde{D} \left\| \frac{\partial A}{\partial \eta} \right\|^2 \right], & v = \frac{\partial A}{\partial z}. \end{cases} \quad (1.53)$$

Умножим уравнения (1.41) скалярно на  $\Phi_m \nabla A_m$  и просуммируем полученные равенства по всем  $m$ . Возьмем мнимую часть полученного тождества. С помощью (1.52), (1.53) и тождества  $\operatorname{Im} \left( \frac{\partial A}{\partial z}, \nabla A \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{Im} (A, \nabla A)$  для  $\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$  сразу же приходим к равенству  $dI_2/dz = 0$ , а в случае  $\tilde{\nabla} = \partial/\partial z$  — к интегралу движения  $I_3$ . Посмотрим, что озна-

чают условия (1.46) и (1.47) для некоторых из исследуемых задач.

Для случая распространения пучка в среде с кубичной нелинейностью (уравнение (1.11)) условия 1) и 2) выполнены и:  $U = \varphi |A|^4$ .

При трехчастотном взаимодействии волн условия 1) и 2) выполнены ( $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ ),  $\varphi_m = 1/\alpha_m$ ,  $U = -2\text{Re}(A_1 A_2 A_3^*)$ . Для резонансного взаимодействия  $N$  волн  $\varphi_m = 1/\alpha_m$  и  $U$  (см. (1.40)).

В случае распространения пучка в среде с тепловым механизмом нелинейности в отсутствие поглощения в первом уравнении (1.14) условие 1) выполнено, и задача имеет интеграл движения  $I_1$ , а также интеграл  $I_3$ .

В задаче о четырехчастотном взаимодействии волн также выполняются соотношения (1.46), (1.47), а функция  $U$  имеет вид

$$U = -\alpha^{(1)} 2 \text{Re} (A_1 A_2 A_3 A_4^* e^{-i\Delta k z}) - \alpha^{(11)} \left[ \frac{1}{2} \left( \sum_{m=1}^4 |A_m|^2 \right)^2 - \frac{1}{4} \sum_{m=1}^4 |A_m|^4 \right].$$

Кроме того, для задач многочастотного взаимодействия волн существуют дополнительные инварианты, называемые соотношениями Мэнли—Роу. А именно при трехчастотном взаимодействии (см. (1.33)–(1.35)) это

$$I_{1,3} = \frac{\|A_1(z)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|A_3(z)\|^2}{\alpha_3} = \text{const}, \quad (1.54)$$

$$I_{2,3} = \frac{\|A_2(z)\|^2}{\alpha_2} + \frac{\|A_3(z)\|^2}{\alpha_3} = \text{const}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3,$$

а при четырехчастотном (1.36)–(1.38) это интегралы движения:

$$I_{4,2} = \frac{\|A_4(z)\|^2}{\alpha_4} + \frac{\|A_2(z)\|^2}{\alpha_2} = \text{const},$$

$$I_{4,3} = \frac{\|A_4(z)\|^2}{\alpha_4} + \frac{\|A_3(z)\|^2}{\alpha_3} = \text{const}, \quad (1.55)$$

$$I_{4,1} = \frac{\|A_4(z)\|^2}{\alpha_4} + \frac{\|A_1(z)\|^2}{\alpha_1} = \text{const}, \quad \alpha_j = \frac{n_j(\omega_j)}{\omega_j}.$$

Аналогичные интегралы движения Мэнли—Роу выписываются и для многочастотного взаимодействия (1.50) произвольного числа волн. Вообще, если для некоторых  $k$  и  $l$  существуют такие действительные  $\varphi_k$  и  $\varphi_l$ , что

$$\text{Re} (\varphi_k F_k A_k^* + \varphi_l F_l A_l^*) = 0, \quad (1.56)$$

$$I_{kl} = \varphi_k \|A_k\|^2 + \varphi_l \|A_l\|^2 = \text{const}, \quad (1.57)$$

$$1 \leq k, l \leq N.$$

Отметим, что для всех рассматриваемых задач правые части уравнений (1.41) допускают полиномиальный рост по  $A_m$ , так что выполняются неравенства

$$|F_m| \leq C_0 \left( 1 + \prod_{j=1}^N |A_j|^{q_j} \right), \quad (1.58)$$

$$\left| \frac{\partial F_m}{\partial A_l} \right|, \quad \left| \frac{\partial F_m}{\partial A_l^*} \right| \leq C_0 \left( 1 + \prod_{j=1}^N |A_j|^{q_j} \right),$$

$$C_0, q_j \geq 0, \quad m, l = 1, 2, \dots, N.$$

Если условия (1.46) не выполняются, то, как правило, справедливо неравенство

$$\text{Re} \sum_{m=1}^N (F_m, A_m) \leq \varepsilon \sum_{m=1}^N \|A_m\|^2, \quad (1.59)$$

$$\varepsilon > 0, \quad 0 \leq z \leq L_z.$$

В этом случае  $I_1(z) \leq e^{2\varepsilon L_z} I_1(0)$  и полная энергия волн ограничена. Так, в задачах теплового самовоздействия световых пучков условие (1.59) выполнено и  $I_1(z) \leq I_1(0) e^{-2\varepsilon L_z}$  (см. (1.14) — (1.15)). Для задач (1.23) и (1.24) неравенство (1.59) также имеет место. Отметим, что условие (1.59) справедливо в нестационарных задачах двухфотонного резонанса (1.25) — (1.28), (1.29) — (1.32) и т. д.

В заключение отметим, что некоторые инварианты распространения оптических пучков в облачной среде приведены в [88, гл. 4], а для случая встречного взаимодействия в керровской среде и в среде с тепловым механизмом нелинейности — соответственно в [38 и 42, гл. 4].

#### § 4.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение сделаем несколько замечаний и выводов. Прежде всего отметим, что приведенный выше круг задач, очевидно, не является исчерпывающим, хотя и включает в себя многие задачи нелинейной оптики. Так, уравнения для многочастотного взаимодействия описывают процессы ОВФ, вынужденного рассеяния, спектроскопии. Иногда к этим уравнениям следует добавить еще материальные уравнения отклика среды на различных частотах (см., например, [42]). Многие проблемы и различные математические модели предложены в [35—45] (а также в других работах). Так, в [34] рассмотрены различные лазерные системы, в [35] — многочисленные явления нелинейной опти-

ки. В [36; 38] предложена модель исследования самовоздействия световых пучков в случайно-неоднородных средах, а в [39; 40] — для многомодовых пучков. В [37] применен метод обратной задачи для исследования самовоздействия коротких световых импульсов. Работы [41; 44] посвящены математическому моделированию генерации оптических гармоник в слоистых средах. В [43] рассматриваются процессы генерации высших оптических гармоник. Различные постановки задач оптической термохимии в газах рассмотрены в [45]. Несомненно, данный список можно было бы продолжить, но, на наш взгляд, во-первых, он отражает имеющиеся в настоящее время различные модели взаимодействия оптического излучения с веществом, во-вторых, связан с непосредственными научными интересами авторов и достаточно хорошо иллюстрирует круг рассматриваемых проблем.

Из вышеизложенного нетрудно сделать вывод о необходимых этапах математического моделирования. Кратко их можно сформулировать следующим образом. Это прежде всего выделение существенных факторов протекания физического процесса, которые определяют физическую модель, запись соответствующих уравнений и постановка граничных и начальных условий. Необходимым этапом являются переход к безразмерным переменным и запись  $\pi$ -комплексов. Важным моментом являются запись имеющихся инвариантов и оценка поведения правых частей.

---

## Глава 2

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ

Настоящая глава посвящена построению численных методов решения некоторых задач нелинейной оптики. За основу при построении приближенных методов решения исходных систем нелинейных дифференциальных уравнений принимается принцип консервативности, согласно которому дискретные модели дифференциальных задач должны обладать сеточными аналогами законов сохранения, если таковые имеют дифференциальные задачи. Такой подход приводит, как правило, к нелинейным дискретным моделям и к необходимости использовать итерационные методы для нахождения приближенного решения.

В § 1 рассматривается случай стационарного распространения осесимметричных волновых пучков в координатах  $(z, r)$ . Построены консервативные нелинейные разностные схемы, сохраняющие на сетке разностные аналоги интегралов в Мэнли—Роу (1.57), и инварианта  $I_1$  (1.49) при произвольном виде правых частей. Предложен итерационный метод решения возникающей системы нелинейных алгебраических уравнений. Приведены теоремы о сходимости итераций и сходимости решения нелинейной разностной задачи к достаточно гладкому решению дифференциальной задачи. Установлены скорость и условия сходимости.

§ 2 посвящен построению разностных схем для задач распространения импульсов в нелинейных средах в координатах  $(z, \eta)$ . Здесь также построены консервативные разностные схемы, сохраняющие инварианты Мэнли—Роу. Приведены теоремы о сходимости итерационного процесса и решения разностной задачи к достаточно гладкому решению дифференциальной.

В последующих параграфах рассматриваются трехмерные задачи нелинейной оптики. В § 3 изучаются случаи, когда существенными являются как временные, так и пространственные неоднородности излучения в координатах  $(z, r, \eta)$  и  $(z, x, \eta)$ . Выписываются консервативные схемы. В § 4 рассматривается стационарный режим взаимодействия волновых пучков в координатах  $(x, y, z)$ . Построен алгоритм спектрального метода решения соответствующей дифференциальной задачи, показана их консервативность. Он сохраняет инварианты  $I_1, I_2$  и Мэнли—Роу. Приведены теоремы о сходимости итераций и решения приближенной задачи к точному решению. § 5 посвящен построению разностных схем для нестационарных задач прохождения излучения в средах с двухфотонным резонансом в координатах

$(z, r, t)$ . Строятся консервативные нелинейные разностные схемы. Системы нелинейных алгебраических уравнений решаются с помощью итераций и прогонки по координате  $r$ . Сформулирована теорема о сходимости итерационного процесса. Отдельно исследовано приближение плоских волн (координаты  $(z, \eta)$ ). Доказана сходимость решения разностной задачи к достаточно гладкому решению дифференциальной.

В § 6 построены разностные методы в задачах распространения оптического излучения в облачной среде при различных условиях на трассе.

В § 7 рассмотрены численные методы для задачи внутриврезонаторной гармоник. Рассмотрены различные физические постановки задачи. Сформулированы теоремы о сходимости итерационного метода и решения разностной задачи к достаточно гладкому решению дифференциальной задачи.

В § 8 рассмотрена задача о стимулировании химических процессов в газах оптическим излучением. Построена консервативная разностная схема. Приведены теоремы о сходимости итерационного процесса и решения разностной задачи к достаточно гладкому решению исходной задачи.

В § 9 дан краткий обзор численных методов, предложенных другими авторами.

## § 1.

### ДВУХСЛОЙНЫЕ КОНСЕРВАТИВНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА. КООРДИНАТЫ $(z, r)$

#### 1.1.

#### Нелинейность керровского типа

Здесь исследуется случай стационарного взаимодействия произвольного числа электромагнитных волн в нелинейной среде, когда отсутствует двулучепреломление, можно пренебречь эффектами дисперсионного распыливания импульсов и групповые скорости всех волн одинаковы. В аксиально-симметричном случае распространение световых пучков описывается следующей системой уравнений относительно комплексной вектор-функции  $A = A(z, r)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iD\Delta_r A = F(A, A^*), \quad (2.1)$$

$$A(0, r) = A^{(0)}(r), \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial A}{\partial r}(z, 0) = A(z, R) = 0, \quad \Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right). \quad (2.3)$$

Здесь  $(z, r) \in G$ ,  $G = \{(z, r) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq L_z\}$ ,

$$A = (A_1, A_2, A_3, \dots, A_N), F = (F_1, F_2, \dots, F_N),$$

$D$  — диагональная матрица с элементами  $\{D_m\}$  размерности  $N \times N$ .

Введем в области  $G$  равномерные по  $z$  и  $r$  сетки:

$$\omega_z = \{z = z_k, z_k = kh_z, \quad k = 0, 1, \dots, N_z - 1, h_z = L_z/N_z\},$$

$$\omega_r = \{r = r_l, r_l = (l + 0,5)h_r, \quad l = 0, 1, \dots, N_r - 1, h_r = R/(N_r + 0,5)\},$$

$$\omega = \omega_z \times \omega_r.$$

Оператор Лапласа по переменной  $r$  аппроксимируется на  $\omega_r$  известным образом [1]:

$$\Delta_r v(r) = \frac{1}{r} (\bar{r} v_{\bar{r}})_r = \frac{1}{r h_r} \left[ (r + 0,5 h_r) \frac{v(r + h_r) - v(r)}{h_r} - (r - 0,5 h_r) \frac{v(r) - v(r - h_r)}{h_r} \right],$$

причем  $\Delta_r = \Delta_r v + O(h_r^2/r)$  для достаточно гладкой  $v$ . Задаче (2.1) — (2.3) поставим в соответствие следующую двухслойную нелинейную разностную схему:

$$\frac{u(z + h_z, r) - u(z, r)}{h_z} + i D \Delta_r U(z, r) = F(U(z, r), U^*(z, r)), \quad (2.4)$$

$$u(0, r) = A^{(0)}(r), \quad (2.5)$$

$$u(z, R) = 0. \quad (2.6)$$

Здесь  $(z, r) \in \omega$ ,  $U(z, r) = 0,5(u(z + h_z, r) + u(z, r))$ ,  $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)$ . Система разностных уравнений (2.4) — (2.6) является нелинейной. Для нахождения неизвестной функции  $u(z + h_z, r)$  можно использовать итерационный метод последовательных приближений в сочетании с разностной прогонкой по  $r$ :

$$\frac{u^{s+1}(z + h_z, r) - u^s(z, r)}{h_z} + i D \Delta_r \bar{U}^s(z, r) = F(\bar{U}^s(z, r), \bar{U}^{s*}(z, r)), \quad (2.7)$$

$$u^s(z + h_z, R) = 0, \bar{U}^s(z, r) = 0,5(u^s(z + h_z, r) + u^s(z, r)),$$

$$u^{(0)}(z + h_z, r) = u^{(0)}(z, r), \quad s = 0, 1, \dots, (z, r) \in \omega.$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 2.1.** Пусть выполнены условия (1.58) и  $h_z \leq ch_r^{q+1}$ ,  $c > 0$ . Тогда существует единственное решение системы (2.4) — (2.6), а итерационный процесс (2.7) сходится к реше-

нию этой системы как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim h_z/h_r^{q+1}$ .

**Теорема 2.2.** Разностная схема (2.4)—(2.6) является консервативной. Она сохраняет на сетке разностные аналоги интегралов  $I_1$  и интегралов Мэнли — Роу (1.57). Если выполнены условия (1.59), то разностный аналог полной энергии волн ограничен.

**Теорема 2.3.** Пусть существует достаточно гладкое решение задачи (2.1)—(2.3) и выполнены условия (1.46) либо (1.59). Тогда решение приближенной задачи (2.4)—(2.6) сходится к решению исходной задачи (2.1)—(2.3) в сеточной норме  $L_2(\omega_r)$  со скоростью  $O(h_z^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}} + h_z^2)$  при  $h_z \leq Ch_r^{q+2}$ .

Сеточная норма  $L_2(\omega_r)$  определяется следующим образом:

$$(u, v) = \sum_{m=1}^N \sum_{r \in \omega_r} u_m(r) v^*(r) r h_r, \quad u(R) = v(R) = 0.$$

## 1.2.

Учет теплового изменения показателя преломления

При учете теплового механизма изменения показателя преломления система уравнений для комплексных огибающих волновых пучков принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i D \Delta_r A = F(A, A^*) - i \alpha T A - \delta A,$$

$$\Delta_r T = -\delta' A A^*, \quad (2.8)$$

$$A(0, r) = A^{(0)}(r), \quad \Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial A}{\partial r}(z, 0) = A(z, R) = \frac{\partial T}{\partial r}(z, 0) = T(z, R) = 0,$$

$$(z, r) \in G, \quad G = \{(z, r) : 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq L_z\}. \quad (2.10)$$

Здесь  $A = (A_1, \dots, A_N)$ ,  $F = (F_1, \dots, F_N)$ ,  $T$  — действительная скалярная функция,  $D$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\delta'$  — диагональные матрицы размерности  $N \times N$ .

Напишем следующую двухслойную схему для (2.8)—(2.10):

$$\begin{aligned} \frac{u(z+h_z, r) - u(z, r)}{h_z} + i D \Delta_r U = F(U, U^*) - \delta U - i 0,5 \alpha [T_h(z + \\ + h_z, r) + T_h(z, r)] U, \end{aligned} \quad (2.11)$$



$$\Delta_r T_h(z+h_z, r) = -\delta' u(z+h_z, r) u^*(z+h_z, r), \quad (2.12)$$

$$u(0, r) = A^{(0)}(r), \quad (2.13)$$

$$u(z, R) = 0, \quad T_h(z, R) = 0, \quad (z, r) \in \omega. \quad (2.14)$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в п. 1.1. Система разностных уравнений (2.11) — (2.14) является нелинейной. Так же как и в п. 1.1, для нахождения значений неизвестных функций  $u(z+h_z, r)$  и  $T_h(z+h_z, r)$  на верхнем слое используется итерационный метод последовательных приближений в сочетании с прогонкой по  $r$ . При этом значения неизвестных функций в правых частях (2.11) на верхнем слое берутся с  $s$ -й итерации, а в левых — с  $(s+1)$ -й итерации. В (2.12) в левой и правой частях неизвестные функции берутся с  $s$ -й итерации.

**Теорема 2.4.** Пусть выполнены условия (1.58) и  $h_z \leq \leq ch_r^{q_1}$  ( $q_1 = \max(q, 3)$ ). Тогда существует единственное решение системы (2.11) — (2.14), а итерационный процесс сходится к решению этой системы как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim h_z/h_r^{\max(q+1, 3)}$ .

**Теорема 2.5.** Пусть существует достаточно гладкое решение задачи (2.8) — (2.10) и выполнены условия (1.46) либо (1.59). Тогда решение приближенной задачи (2.11) — (2.14) сходится к решению исходной задачи (2.8) — (2.10) в сеточной норме  $L_2(\omega_r)$  со скоростью  $O(h_r^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}})$  при  $h_z \leq \leq ch_r^{q+2}$ .

**З а м е ч а н и е.** Рассмотрим чисто тепловое самовоздействие светового пучка. Тогда в (2.8)  $N=1$  и  $F(A, A^*)=0$ .

При выполнении условия  $h_z \leq c/\ln R/h_r$  итерационный процесс сходится в сеточной норме  $L_2(\omega_r)$  как геометрическая прогрессия со знаменателем меньше единицы.

Если справедливо неравенство  $h_z \leq Ch_r/\ln R/h_r$ , то решение разностной задачи сходится к достаточно гладкому решению дифференциальной задачи в сеточной норме  $L_2(\omega_r)$  со скоростью  $O(h_r^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}} + h_z^2)$ .

## § 2.

### РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ

### РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСОВ

### В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ.

### КООРДИНАТЫ $(z, \eta)$

#### 2.1.

#### Общий случай

Рассмотрим случай нестационарного взаимодействия произвольного числа плоских волн в нелинейной диспергирующей среде с учетом различия групповых скоростей и дисперсионного рас-

плывания волновых пакетов ( $v_m \neq 0$ ,  $D_m \neq 0$ ,  $\beta_m = 0$ ,  $D_m = 0$ ) в (1.42) — (1.43). Задача (1.41) — (1.45) переписывается тогда в следующем виде для комплекснозначной вектор-функции  $A(z, \eta)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + v \frac{\partial A}{\partial \eta} + i \tilde{D} \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} = F(A, A^*), \quad (2.15)$$

$$A(0, \eta) = A^{(0)}(\eta), \quad 0 \leq \eta \leq L_\eta, \quad (2.16)$$

$$A(z, 0) = A(z, L_\eta) = 0, \quad 0 \leq z \leq L_z, \quad (2.17)$$

$v = \{v_m\}$ ,  $\tilde{D} = \{D_m\}$  — диагональные матрицы размерности  $N \times N$ .

Введем в области  $G = \{(z, \eta): 0 \leq z \leq L_z, 0 \leq \eta \leq L_\eta\}$  равномерные сетки по  $z$  и  $\eta$ :

$$\omega_z = \{z = z_k, z_k = kh_z, k = 0, 1, \dots, N_z - 1, h_z = L_z/N_z\},$$

$$\omega_\eta = \{\eta = \eta_l, \eta_l = lh_\eta, l = 1, \dots, N_\eta - 1, h_\eta = L_\eta/N_\eta\}.$$

$$\omega = \omega_z \omega_\eta.$$

Задаче (2.15) — (2.17) поставим в соответствие следующую нелинейную двухслойную схему:

$$\frac{u(z+h_z, \eta) - u(z, \eta)}{h_z} + v U_\eta^0(z, \eta) + i \tilde{D} \Delta U(z, \eta) = F(U, U^*), \quad (2.18)$$

$$u(0, \eta) = A^{(0)}(\eta), \quad (2.19)$$

$$u(z, 0) = u(z, L_\eta) = 0, \quad (z, \eta) \in \omega, \quad u = (u_1, \dots, u_N), \quad (2.20)$$

$$U(z, \eta) = 0,5(u(z+h_z, \eta) + u(z, \eta)), \quad V_\eta^0 = 0,5(v(\eta+h_\eta) - v(\eta-h_\eta))/h_\eta, \quad \Delta v = (v(\eta+h_\eta) - 2v(\eta) + v(\eta-h_\eta))/h_\eta^2.$$

Для нахождения решения  $u(z+h_z, \eta)$  на новом слое по  $z$  системы нелинейных разностных уравнений (2.18) — (2.20) будем использовать итерационный метод в сочетании с прогонкой по  $\eta$ . Рассмотрим следующий процесс перехода на слой  $z+h_z$ :

$$\frac{u^{s+1}(z+h_z, \eta) - u^s(z, \eta)}{h_z} + v U_\eta^{s+1}(z, \eta) + i \tilde{D} U^{s+1}(z, \eta) = F(U^s, U^{s*}), \quad (2.21)$$

$$u^s(z+h_z, 0) = u^s(z+h_z, L_\eta) = 0, \quad u^0(z+h_z, \eta) = u(z, \eta), \quad (2.22)$$

$$U^s(z, \eta) = 0,5(u^s(z+h_z, \eta) + u^s(z, \eta)), s = 0, 1, \dots, (z, \eta) \in \omega.$$

Справедливы следующие теоремы.

**Теорема 2.6.** Пусть выполнены условия (1.58) и  $h_z \ll \leq Ch_\eta^{(q+1)/2}$ . Тогда существует единственное решение системы (2.18)—(2.20), а итерационный процесс (2.21)—(2.22) сходится к решению этой системы как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim h_z/h_\eta^{(q+1)/2}$ .

**Теорема 2.7.** Разностная схема (2.18)—(2.20) консервативна. Она сохраняет на сетке разностные аналоги интеграла  $I_1$  и интегралов Мэнли—Роу (1.57). Если выполнено условие (1.59), то разностный аналог полной энергии волн ограничен и справедливо неравенство

$$I_1^h(z) \leq I_1^h(0) e^{(2\delta+\epsilon)Lz}, \quad h_z \leq h_z^{(0)}, \quad \epsilon > 0.$$

**Теорема 2.8.** Пусть существует достаточно гладкое решение задачи (2.15)—(2.17) и выполнены условия (1.46) либо (1.59). Тогда решение приближенной задачи (2.18)—(2.20) сходится к решению исходной задачи (2.15)—(2.17) в сеточной норме  $L_2(\omega_\eta)$  со скоростью  $O(h_\eta^2)$  при  $h_z \leq Ch_\eta^{q/2+1}$ .

**З а м е ч а н и е.** Пусть все  $\tilde{D}_m \neq 0$  в (2.15). Тогда после замены  $A_m = \tilde{A}_m \exp(iv_m \eta / 2\tilde{D}_m)$  задача (2.15)—(2.17) переписется в виде

$$\frac{\partial \tilde{A}_m}{\partial z} + i \tilde{D}_m \frac{\partial^2 \tilde{A}_m}{\partial \eta^2} + iv_m^2 \tilde{A}_m / 4\tilde{D}_m = F(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_N,$$

$$\tilde{A}_1^*, \dots, \tilde{A}_N^*),$$

$$\tilde{A}_m(0, \eta) = A_m^{(0)} \exp(-iv_m \eta / 2\tilde{D}_m), \quad \tilde{A}_m(z, 0) = \tilde{A}_m(z, L_\eta) = 0.$$

При симметричной аппроксимации этого уравнения (см. (2.18)) решение на новом слое по  $z$  также находим итерационным методом в сочетании с прогонкой по  $\eta$ . Все результаты, относящиеся к схеме (2.18)—(2.20), будут справедливы и для симметричной схемы, аппроксимирующей выше написанную задачу.

## 2.2.

### Первое приближение теории дисперсии ( $\tilde{D}_m = 0$ )

В первом приближении теории дисперсии учитывается только различие групповых скоростей волн ( $v_m \neq 0$ ,  $\tilde{D}_m = 0$ ). Система (2.15) представляет собой в этом случае систему слабонелинейных гиперболических уравнений. Так как  $v_m = \text{const}$ , то характеристики (2.15) — прямые линии. Для моделирования процесса распространения импульсов в диспергирующих средах часто бывает достаточным считать, что отношения расстроек групповых скоростей волн — рациональные числа. Это связано с тем, что измерения в реальных физических экспериментах всегда имеют конечную точность. Итак, пусть

$$\frac{n_1}{v_1} = \frac{n_2}{v_2} = \dots = \frac{n_N}{v_N}, \quad \text{sign}(n_m) = \text{sign}(v_m), \quad m = 1, \dots, N,$$

где  $n_m$  — целые числа. В этом случае в области  $G = \{(z, \eta): 0 \leq z \leq L_z, 0 \leq \eta \leq L_\eta\}$  можно ввести согласованную равномерную по  $z$  и  $\eta$  характеристическую сетку  $\omega$ , шаги которой связаны соотношением  $n_m h_\eta = v_m h_z$ . Для операторов переноса в (2.15) используем характеристическую аппроксимацию

$$\begin{aligned} T_m A_m &= h_z^{-1} [A_m(z + h_z, \eta) - A_m(z, \eta - n_m h_\eta)] = \\ &= \frac{\partial A_m}{\partial z} + v_m \frac{\partial A_m}{\partial \eta} + O(h_z) \end{aligned}$$

для достаточно гладкой  $A_m$ . Симметричная разностная схема, аппроксимирующая задачу (2.15) — (2.17), тогда будет иметь вид

$$T_m u_m(z, \eta) = F_m(U_1, U_2, \dots, U_N, U_1^*, \dots, U_N^*), \quad (2.23)$$

$$u_m(0, \eta) = A_m^{(0)}(\eta),$$

$$u_m(z, \eta) = 0, \quad \eta \leq 0 \vee \eta \geq L_\eta,$$

$$(z, \eta) \in \omega, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь  $U_m(z, \eta) = 0,5(u_m(z + h_z, \eta) + u_m(z, \eta - n_m h_\eta))$ . Система (2.23) является нелинейной. Для нахождения решения в точке  $(z + h_z, \eta)$  используется метод простой итерации, когда неизвестные функции в правых частях (2.23) берутся с  $s$ -й итерации, а в левых — с  $(s+1)$ -й итерации,  $\dot{u}_m(z + h_z, \eta) = u_m(z, \eta - n_m h_\eta)$ . С помощью принципа сжатых отображений нетрудно доказать, что решение (2.23) существует и единственно, а итерационный процесс сходится как геометрическая прогрессия со скоростью  $\tilde{q} \sim h_z$ ,  $h_z \leq h_z^{(0)}$ , если выполнены условия (1.56). Аналогично § 1 при выполнении условий (1.46) схема (2.23) сохраняет разностный аналог интеграла  $I_1$ , а при выполнении условий (1.56) — разностные аналоги интегралов Мэнли—Роу. Если выполнено условие (1.59), то разностный аналог полной энергии волн ограничен.

### § 3.

#### СОВМЕСТНЫЙ УЧЕТ ДИСПЕРСИОННЫХ ЭФФЕКТОВ И ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ.

КООРДИНАТЫ  $(z, r, \eta)$ ,  $(z, x, \eta)$

В настоящем параграфе рассматриваются разностные схемы для случаев, когда существенными являются как временные, так и пространственные неоднородности излучения. При этом уравнения становятся существенно трехмерными. Здесь исследуются

лишь системы уравнений с такими комбинациями временных и пространственных производных, учет которых приводит к разностным схемам, реализующимся на новом слое по  $z$  с помощью метода итераций и прогонки (по  $r$  или по  $\eta$ ).

### 3.1.

*Первое приближение теории дисперсии с учетом дифракции. Координаты  $(z, r, \eta)$*

В этом случае распространение световых пучков описывается следующей системой уравнений для комплекснозначных вектор-функций  $A(z, r, \eta)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + v \frac{\partial A}{\partial \eta} + i D \Delta_r A = F(A, A^*), \quad (2.24)$$

$$A(0, r, \eta) = A^{(0)}(r, \eta), \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial A}{\partial r}(z, 0, \eta) = A(z, R, \eta) = 0; \quad A(z, r, 0) = A(z, r, L_\eta) = 0, \quad (2.26)$$

$$(z, r, \eta) \in G = \{0 \leq z \leq L_z, 0 \leq r \leq R, 0 \leq \eta \leq L_\eta\},$$

$v = \{v_m\}$ ,  $D = \{D_m\}$  — диагональные матрицы размерности  $N \times N$ . По аналогии с п. 2.2 будем считать, что отношения расстроек групповых скоростей волн — рациональные числа:

$$\frac{n_1}{v_1} = \dots = \frac{n_N}{v_N}, \quad \text{sign}(n_m) = \text{sign}(v_m), \quad m = 1, \dots, N,$$

$n_m$  — целые числа. Введем в области  $G$  равномерную по  $r$  (см. § 1) и равномерную по  $z$  и  $\eta$  характеристическую сетку, шаги которой связаны соотношением  $n_m h_\eta = v_m h_z$ . Поставим в соответствие задаче (2.24) — (2.26) следующую нелинейную двухслойную разностную схему:

$$T u + i D \Delta_r U = F(U, U^*), \quad (2.27)$$

$$u(0, r, \eta) = A^{(0)}(r, \eta), \quad u(z, R, \eta) = 0, \quad (2.28)$$

$$(z, r, \eta) \in \omega,$$

$$u(z, r, \eta) = 0 \text{ при } \eta \leq 0 \vee \eta \geq L_\eta. \quad (2.29)$$

Здесь оператор  $\Delta_r$  определен в § 1,  $T u = \{T_m u_m\}$ ,  $U = \{U_m\}$ ,  $T_m u_m = (u_m(z + h_z, r, \eta) - u_m(z, r, \eta - n_m h_\eta)) h_z$ ,

$$U_m(z, r, \eta) = 0,5(u_m(z + h_z, r, \eta) + u_m(z, r, \eta - n_m h_\eta)), \quad m = 1, \dots, N.$$

Система (2.27) — (2.29) является нелинейной. Для ее решения на слое  $z + h_z$  используется итерационный метод, аналогичный

уже рассмотренным, когда значения неизвестных функций в правых частях берутся с  $s$ -й, а в левых — с  $(s+1)$ -й итерации, в сочетании с прогонкой по  $r$ . Все результаты § 1, относящиеся к схеме (2.4)—(2.6), переносятся на задачу (2.27)—(2.29). А именно, введем нормы

$$\|u\|_c = \max_{1 \leq m \leq N} \max_{(r, \eta)} |u(r, \eta)| \text{ и } \|u\|^2 = \sum_{m=1}^N \sum_{(r, \eta)} |u(r, \eta)|^2 r h_r h_\eta.$$

Тогда если выполнены условия  $h_z \leq Ch_r^{q+1}$ , то существует единственное решение системы (2.27)—(2.29), а метод простой итерации для ее решения сходится в равномерной метрике как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\tilde{q} \sim h_z/h_r^{q+1}$ . Далее схема (2.27)—(2.29) является консервативной. Она сохраняет разностные аналоги интеграла  $I_1$  и интегралов Мэнли—Роу. Если выполнены условия (1.59), то разностный аналог полной энергии волн ограничен. И наконец, если существует достаточно гладкое решение задачи (2.24)—(2.26) и выполнены условия (1.46) или (1.59), то решение задачи (2.27)—(2.29) сходится к нему в сеточной норме  $L_2$  со скоростью  $O(h_r^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}})$  при  $h_z \leq ch_r^{q+2}$ .

### 3.2.

*Второе приближение теории дисперсии  
с учетом неколлинеарности взаимодействия  
и расстройки групповых скоростей.  
Координаты  $(z, x, \eta)$*

В этом случае уравнения записываются в виде

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta \frac{\partial A}{\partial x} + \gamma \frac{\partial A}{\partial \eta} + i\tilde{D} \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} = F(A, A^*), \quad (2.30)$$

$$A(0, x, \eta) = A^{(0)}(x, \eta), \quad (2.31)$$

$$A(z, 0, \eta) = A(z, L_x, \eta) = 0, \quad A(z, x, 0) = A(z, x, L_\eta) = 0, \quad (2.32)$$

$(z, x, \eta) \in G = \{(z, x, \eta): 0 \leq z \leq L_z, 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq \eta \leq L_\eta\}$ ,  $v = \{v_m\}$ ,  $\beta = \{\beta_m\}$ ,  $\tilde{D} = \{D_m\}$  — диагональные матрицы размерности  $N \times N$ . Если отношения величин углов наклона лучевых векторов к оси  $z$  — рациональные числа

$$\frac{k_1}{\beta_1} = \frac{k_2}{\beta_2} = \dots = \frac{k_N}{\beta_N}, \quad \text{sign}(k_m) = \text{sign}(\beta_m),$$

$k$  — целые,  $m = 1, 2, \dots, N$ , то в области  $G$  введем равномерную согласованную по  $x$  и  $z$  характеристическую сетку, шаги которой связаны соотношением  $k_m h_x = \beta_m h_z$ , а разностная схема, аппрок-

симирующая задачу (2.30) — (2.32), запишется в следующем виде (см. § 2):

$$Tu + \nu U_{\eta}^{\circ} + i\tilde{D}\Lambda U = F(U, U^*), \quad (2.33)$$

$$u(0, x, \eta) = A^{(0)}(x, \eta), \quad (2.34)$$

$$u(z, x, 0) = u(z, x, L_{\eta}) = 0, \quad (2.35)$$

$$u(z, x, \eta) = 0 \text{ при } x \leq 0 \vee x \geq L_x.$$

Здесь оператор  $\Lambda$  и центральная разностная производная определены в § 2,  $Tu = \{T_m u_m\}$ ,  $U = \{U_m\}$ ,

$$T_m u_m = (u_m(z + h_z, x, \eta) - u_m(z, x - k_m h_x, \eta)) / h_z,$$

$$U_m = 0,5(u_m(z + h_z, x, \eta) + u_m(z, x - k_m h_x, \eta)), m = 1, \dots, N.$$

Решение задачи (2.33) — (2.35) на новом слое по  $z$  находится с помощью итераций и прогонки по  $\eta$ . Все результаты § 2, относящиеся к схеме (2.18) — (2.20), переносятся на задачу (2.33) — (2.35). Если ввести нормы  $\|u\|_c = \max_{1 \leq m \leq N} \max_{(x, \eta)} |u(x, \eta)|$  и

$$\|u\|^2 = h_x h_{\eta} \sum_{m=1}^N \sum_{(x, \eta)} |u(x, \eta)|^2, \text{ то при выполнении условия } h_z \leq$$

$\leq Ch_{\eta}^{(q+1)/2}$  существует единственное решение системы (2.33) — (2.35), а итерационный процесс для ее решения сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim h_z / h_{\eta}^{(q+1)/2}$ . Схема (2.33) — (2.35) является консервативной. Она сохраняет на сетке разностные аналоги интегралов  $I_1$  и интегралов Мэнли—Роу (1.57). Если выполнено условие (1.59), то разностный аналог полной энергии волн ограничен. Пусть существует достаточно гладкое решение задачи (2.30) — (2.32) и выполнены условия (1.46) или (1.59). Тогда решение разностной задачи (2.33) — (2.35) сходится к нему в сеточной норме  $L_2$  со скоростью  $O(h_{\eta}^2)$  при  $h_z \leq Ch_{\eta}^{(q+1)/2}$ .

### 3.3.

*Взаимодействие неколлинеарных плоских волн в первом приближении теории дисперсии*

Система (2.30) в исследуемом здесь случае представляет собой систему слабонелинейных гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными. Будем считать, что как отношения расстройек групповых скоростей волн, так и отношения величин углов наклона лучевых векторов к оси  $z$  — рациональные числа:

$$\frac{n_1}{\nu_1} = \dots = \frac{n_N}{\nu_N}; \quad \frac{k_1}{\beta_1} = \dots = \frac{k_N}{\beta_N}; \quad \text{sign}(k_m) = \text{sign}(\beta_m);$$

$\text{sign}(n_m) = \text{sign}(\nu_m)$ ;  $n_m$  и  $k_m$  — целые,  $m = 1, \dots, N$ .

В этом случае в области  $G$  можно ввести согласованную равномерную характеристическую сетку, шаги которой связаны соотношениями  $n_m h_\eta = v_m h_z$  и  $k_m h_x = \beta_m h_z$ . Используя характеристическую аппроксимацию для операторов переноса в (2.30), напомним следующую нелинейную разностную схему для задачи (2.30) — (2.32):

$$\begin{aligned} Tu &= F(U, U^*), \\ u(0, x, \eta) &= A^{(0)}(x, \eta), \\ u(z, x, \eta) &= 0 \text{ при } x \leq 0 \vee x \geq L_x \text{ и } \eta \leq 0 \vee \eta \geq L_\eta. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Здесь  $Tu = \{T_m u_m\}$ ,  $U = \{U_m\}$ ,

$$\begin{aligned} T_m u_m &= (u_m(z + h_z, x, \eta) - u_m(z, x - k_m h_x, \eta - n_m h_\eta)) / h_z, \\ U_m &= 0,5[u_m(z + h_z, x, \eta) + u_m(z, x - k_m h_x, \eta - n_m h_\eta)]. \end{aligned}$$

Для нахождения решения системы (2.36) в точке  $(z + h_z, x, \eta)$  используем метод простой итерации, когда неизвестные функции в правых частях (2.36) берутся с  $s$ -й итерации, а в левых — с  $(s+1)$ -й,  $u(z + h_z, x, \eta) = u_m(z, x - k_m h_x, \eta - n_m h_\eta)$ . С помощью принципа сжатых отображений доказывается, что решение (2.36) существует и единственно при  $h_z \leq \bar{h}_z$ , а итерационный процесс сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim h_z$ , если выполнены условия (1.58). При выполнении условий (1.46) схема (2.36) сохраняет разностный аналог интеграла  $I_1$ , а при выполнении условий (1.56) — разностные аналоги интегралов Мэнли—Роу (1.57). Если имеет место условие (1.59), то разностный аналог полной энергии волн ограничен.

#### § 4.

#### СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ. КООРДИНАТЫ $(x, y, z)$

Рассмотрим стационарное взаимодействие произвольного числа электромагнитных волн в нелинейной среде, когда можно пренебречь эффектами дисперсионного расплывания импульсов и групповые скорости всех волн одинаковы.

#### 4.1.

#### Нелинейность керровского типа

Задача (1.41) — (1.45) сводится к следующей задаче для комплекснозначной вектор-функции  $A = A(z, x, y)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta \frac{\partial A}{\partial x} + iD \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = F(A, A^*), \quad (2.37)$$



$$A(0, x, y) = A^{(0)}(x, y), \quad (2.38)$$

$$A(z, 0, y) = A(z, L_x, y) = A(z, x, 0) = A(z, x, L_y) = 0, \quad (2.39)$$

$$0 \leq z \leq L_z, (x, y) \in G, G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}.$$

Здесь  $A = (A_1, A_2, \dots, A_N)$ ;  $F = (F_1, \dots, F_N)$ ;  $D = \{D_m\}$ ,  $\beta = \{\beta_m\}$  — диагональные матрицы размерности  $N \times N$ . Так как изучаются пространственно-ограниченные пучки с финитными начальными распределениями, то размеры области  $G$  выбираются такими, чтобы влияние границы не сказывалось. Тогда можно считать, что на границе области  $G$  выполняются условия периодичности

$$A(z, 0, y) = A(z, L_x, y); A(z, x, 0) = A(z, x, L_y). \quad (2.40)$$

Если выполнены условия (1.46), (1.47), то интегралы движения для задачи (2.37) — (2.39) в рассматриваемом приближении имеют вид (ср. (1.49) — (1.51))

$$I_1 = \iint_G \sum_{m=1}^N |A_m|^2 dx dy, \quad (2.41)$$

$$I_2 = \iint_G \operatorname{Im} (\gamma_m A_m \nabla A_m^*) dx dy, \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \quad (2.42)$$

$$I_3 = \iint_G \left\{ \sum_{m=1}^N \gamma_m \left[ D_m \left( \left| \frac{\partial A_m}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial A_m}{\partial y} \right|^2 \right) + \right. \right. \quad (2.43)$$

$$\left. \left. + \beta_m \operatorname{Im} \left( A_m \frac{\partial A_m^*}{\partial x} \right) \right] + \Phi(A_1, A_2, \dots, A_N, A_1^*, \dots, A_N^*) \right\} dx dy.$$

Алгоритм спектрального метода основывается на представлении решения задачи (2.37) — (2.39) в виде суммы Фурье. Для этого в прямоугольнике  $G$  вводится равномерная сетка  $\omega_h$  с шагами  $h_x$  и  $h_y$  по координатам  $x$  и  $y$  соответственно:

$$\omega_h = \{(x, y) : x = j_1 h_x, j_1 = 0, 1, \dots, N_x, h_x = L_x / N_x, \\ y = j_2 h_y, j_2 = 0, 1, \dots, N_y, h_y = L_y / N_y\}$$

и сетка  $\omega_z$  по переменной  $z$ :

$$\omega_z = \{z = z_n; z_n = n h_z, n = 0, 1, \dots, N_z - 1, h_z = L_z / N_z\},$$

причем  $N_x = 2^{M_x}$ ,  $N_y = 2^{M_y}$ .

После подстановки в (2.37) конечной суммы Фурье аппроксимируем полученную систему уравнений для  $k_x = -\frac{N_x}{2} +$

+ 1, ...,  $\frac{N_x}{2}$  и  $k_y = -\frac{N_y}{2} + 1, \dots, \frac{N_y}{2}$  следующей нелинейной симметричной схемой:

$$\begin{aligned} \frac{u_{k_x k_y}^{n+1} - u_{k_x k_y}^n}{h_z} + i \left[ \sqrt{\lambda_{k_x}} - D \lambda_{k_x k_y} \right] U_{k_x k_y}^n &= F_{k_x k_y}(U^n, U^{*n}), \quad (2.44) \\ u_{k_x k_y}^0 &= A_{k_x k_y}^{(0)}, \quad n=0, 1, \dots, N_z-1, \quad \lambda_{k_x k_y} = \lambda_{k_x} + \lambda_{k_y} = \\ &= 4\pi^2 \left( \frac{k_x^2}{L_x^2} + \frac{k_y^2}{L_y^2} \right), \quad U_{k_x k_y}^n = 0,5(u_{k_x k_y}^{n+1} + u_{k_x k_y}^n), \\ U^n &= 0,5(u^{n+1} + u^n). \end{aligned}$$

Здесь  $u^n$  и  $u^{n+1}$  определены как конечные суммы Фурье:

$$u^n = \sum_{k_x = -\frac{N_x}{2} + 1}^{\frac{N_x}{2}} \sum_{k_y = -\frac{N_y}{2} + 1}^{\frac{N_y}{2}} u_{k_x k_y}^n \mu_{k_x k_y}(x, y), \quad (2.45)$$

а коэффициенты  $F_{k_x k_y}$  вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} F_{k_x k_y} &= \frac{1}{N_x N_y} \sum_{i_1=0}^{N_x-1} \sum_{i_2=0}^{N_y-1} F(U(j_1 h_x, j_2 h_y), \\ &U^*(, ) e^{-2\pi i \left[ \frac{k_x i_1}{N_x} + \frac{k_y i_2}{N_y} \right]}, \quad (2.46) \end{aligned}$$

представляющей собой формулу трапеций для вычисления интеграла Фурье от правой части (2.37) с узлами интегрирования, совпадающими с узлами сетки  $\omega_h$ . Пользуясь периодичностью  $\mu_{k_x k_y}(x, y)$ , нетрудно с помощью преобразования сдвига перенести отрицательную часть спектра в положительную область и переписать (2.45) в виде

$$u^n = \sum_{k'_x=0}^{N_x-1} \sum_{k'_y=0}^{N_y-1} u_{k'_x k'_y}^n \mu_{k'_x k'_y}(x, y)$$

или

$$u^n(j_1 h_x, j_2 h_y) = \sum_{k'_x=0}^{N_x-1} \sum_{k'_y=0}^{N_y-1} u_{k'_x k'_y}^n e^{2\pi i \left[ \frac{k'_x i_1}{N_x} + \frac{k'_y i_2}{N_y} \right]}. \quad (2.47)$$

Вычисления по формулам (2.46) — (2.47) легко проводятся с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье [2] и требуют до порядка арифметических действий  $Q \sim M^2 \log_2 M$ ,  $N_x = N_y = M$ . При практической реализации алгоритма (2.44) — (2.46) необходимо помнить, что переход от формулы (2.45) к (2.47) приводит к новому выражению для  $\lambda_{k_x k_y}$  (см. подробнее, например, [3]). Пользуясь периодичностью функций  $\mu_{k_x k_y}$  и их ортогональностью в дискретном скалярном произведении

$$(\mu_{k_x^{(1)} k_y^{(1)}}, \mu_{k_x^{(2)} k_y^{(2)}}) = \sum_{j_1=0}^{N_x-1} \sum_{j_2=0}^{N_y-1} \mu_{k_x^{(1)} k_y^{(1)}}(j_1 h_x, j_2 h_y) \mu_{k_x^{(2)} k_y^{(2)}}^*(j_1 h_x, j_2 h_y) h_x h_y = 0, \quad k_x^{(1)} \neq k_x^{(2)} \vee k_y^{(1)} \neq k_y^{(2)},$$

нетрудно проверить, что имеет место дискретный аналог равенства Парсеваля

$$\sum_{k_x=-\frac{N_x}{2}+1}^{N_x/2} \sum_{k_y=-\frac{N_y}{2}+1}^{N_y/2} |u_{m, k_x k_y}^n|^2 = \frac{h_x h_y}{L_x L_y} \sum_{j_1=0}^{N_x-1} \sum_{j_2=0}^{N_y-1} |u_m^n(j_1 h_x, j_2 h_y)|^2. \quad (2.48)$$

Построенная симметричная разностная схема (2.44) — (2.46) является нелинейной, и для ее реализации для перехода с  $n$ -го на  $(n+1)$ -й слой необходимо организовать итерационный процесс. Будем осуществлять этот переход с помощью метода простой итерации по формулам

$$\frac{u_{k_x k_y}^{n+1} - u_{k_x k_y}^n}{h_z} + i \left[ \sqrt{\lambda_{k_x k_y}} - D \lambda_{k_x k_y} \right] U_{k_x k_y}^{n+1} = F_{k_x k_y}^s; \quad (2.49)$$

$$u_{k_x k_y}^{n+1} = u_{k_x k_y}^n; \quad s=0, 1, \dots, \quad U_{k_x k_y}^{n+1} = 0,5 (u_{k_x k_y}^{n+1} + u_{k_x k_y}^n);$$

$$F_{k_x k_y}^s = F \left( \frac{u^{n+1} + u^n}{2}, \frac{(u^*)^{n+1} + (u^*)^n}{2} \right).$$

**Теорема 2.9.** Пусть выполнены условия (1.58) и  $h_z \ll \ll \min \left\{ \frac{2\varepsilon(h_x h_y)^{q/2}}{C_0 \sqrt{L_x L_y} C^q}, \frac{(h_x h_y)^{(q+1)/2}}{2C_0 \sqrt{L_x L_y} (2^{q-1} C^q + (2^{q-1} + 1)(h_x h_y)^{q/2})} \right\}$ , где  $\varepsilon > 0$ ,  $C = C_0 \sqrt{L_x L_y} + \varepsilon$ ,  $C_0 > 0$ . Тогда существует единственное решение системы (2.44) — (2.46), а итерационный процесс (2.49) сходится к решению этой системы как геометрическая прогрессия со знаменателем  $q \sim h_z / (h_x h_y)^{(q+1)/2}$ .

Теорема 2.10. Пусть выполнены условия (1.46) и (1.56). Тогда схема (2.44)—(2.46) является консервативной. Она сохраняет на сетке  $\omega_z$  интеграл  $I_1$  (2.41) и инварианты Мэнли—Роу (1.57). Если справедливо неравенство (1.59), то полная энергия волн ограничена и для всех  $z \in \omega_z$  имеет место оценка:  $\|u^n\|^2 \leq \|u^0\|^2 e^{(2\delta + \epsilon)z}$ . Если выполнены условия (1.47), то схема (2.44)—(2.46) сохраняет на сетке интеграл  $I_2$  (2.42), а интеграл  $I_3$  (2.43) сохраняется с порядком  $O(h_z^2)$ .

Теорема 2.11. Пусть существует достаточно гладкое решение задачи (2.37)—(2.40) и выполнены условия: (1.46) или (1.59). Тогда решение приближенной задачи (2.44)—(2.46) сходится к решению исходной задачи  $L_2(G)$  со скоростью  $O[(h_x h_y)^{q+2} + h_x^{m_1-1} + h_y^{m_2-1}]$  при  $h_z \leq C(h_x h_y)^{q/2+1}$ ,  $C > 0$ , где  $m_1$  — число непрерывных производных решения по координате  $x$ ,  $m_2$  — по  $y$ .

#### 4.2.

Учет теплового изменения показателя преломления

Включение в модель теплового механизма изменения показателя преломления в рассматриваемом приближении приводит к следующей задаче для комплекснозначной вектор-функции  $A = A(z, x, y)$  и скалярной функции  $T = T(z, x, y)$ :

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iD \left( \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right) = F(A, A^*) - i\alpha T A - \delta A, \quad (2.50)$$

$$\kappa \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \delta' A A^*, \quad (2.51)$$

$$A(0, x, y) = A^{(0)}(x, y), \quad (2.52)$$

$$A(z, 0, y) = A(z, L_x, y) = A(z, x, 0) = A(z, x, L_y) = 0, \quad (2.53)$$

$$T(z, 0, y) = T(z, L_x, y) = T(z, x, 0) = T(z, x, L_y) = 0.$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\delta$ ,  $\delta'$  также диагональные матрицы размерности  $N \times N$ ;  $\kappa$  — действительная постоянная, учитывающая поперечный снос тепла, например, за счет бокового ветра. В (2.37) мы положили  $\beta = 0$ , считая, что лучевые вектора волн параллельны оси  $z$ . В отсутствие линейного поглощения ( $\delta = 0$  в (2.50)) задача (2.50)—(2.53) имеет интеграл движения  $I_1$  (2.41), если выполнены условия (1.46).

Если  $\kappa \neq 0$  в (2.51), то заменой  $T = T_n e^{-\kappa x/2}$  уравнение (2.51) переводится в

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2} - \frac{\kappa^2}{4} T_n = -e^{-\kappa x/2} \delta' A A^*. \quad (2.54)$$

Алгоритм спектрального метода для (2.50) — (2.54) принципиально незначительно отличается от уже рассмотренного алгоритма (2.44) — (2.46). Главное отличие состоит в том, что разложение в ряды Фурье проводится по функциям

$$u_{k_x k_y} = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin \frac{\pi k_x x}{L_x} \sin \frac{\pi k_y y}{L_y}. \quad (2.55)$$

При этом двухслойная симметричная схема спектрального метода для задачи (2.50) — (2.54) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{u_{k_x k_y}^{n+1} - u_{k_x k_y}^n}{h_z} - i D \lambda_{k_x k_y} U_{k_x k_y}^n = F_{k_x k_y}^n(U^n, U^{*n}) - \\ - i \alpha (T_h^{0.5} U^n)_{k_x k_y} - \delta U_{k_x k_y}^n, \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$T_{h, k_x k_y}^{n+1} = (\delta' u^{n+1} u^{*n+1})_{k_x k_y} / (\lambda_{k_x k_y} + x^2/4), \quad (2.57)$$

$$u_{k_x k_y}^0 = A_{k_x k_y}^{(0)}, \quad k_x = 1, \dots, N_x - 1, \quad k_y = 1, \dots, N_y - 1, \quad (2.58)$$

где

$$\lambda_{k_x k_y} = (\pi k_x / L_x)^2 + (\pi k_y / L_y)^2, \quad U_{k_x k_y}^n (u_{k_x k_y}^{n+1} + u_{k_x k_y}^n) / 2.$$

Коэффициенты Фурье выписываются по формуле

$$\varphi_{k_x k_y} = \frac{2 \sqrt{L_x L_y}}{N_x N_y} \sum_{j_1=1}^{N_x-1} \sum_{j_2=1}^{N_y-1} \varphi(j_1 h_x, j_2 h_y) \sin \frac{\pi k_x}{N_x} j_1 \sin \frac{\pi k_y}{N_y} j_2. \quad (2.59)$$

Вычисления по (2.58) — (2.59) также проводятся с помощью алгоритма быстрого синус-преобразования Фурье [4]. Для реализации схемы (2.56) — (2.59) применяется итерационный процесс, аналогичный (2.49). Значения неизвестных функций и их коэффициентов Фурье на верхнем  $(n+1)$ -м слое в правых частях (2.56) берутся с  $s$ -й итерации, а в левой — с  $(s+1)$ -й. В (2.57) неизвестные функции в левой и правой частях берутся с одной и той же итерации.

**Теорема 2.12.** Пусть существует достаточно гладкое решение задачи (2.50) — (2.53) и выполнены условия (1.46) или (1.59). Тогда решение приближенной задачи (2.56) — (2.59) сходится к решению исходной в  $L_2(G)$  с той же скоростью и при тех же условиях, что и в теореме 2.11. Если  $F(A, A^*) = 0$  ( $N=1$ ) в (2.50), то решение дискретной задачи (2.56) — (2.59) сходится к достаточно гладкому решению задачи (2.50) — (2.53) в  $L_2(G)$  со скоростью  $O(h_z^2 + h_x^{m_1-1} + h_y^{m_2-1})$ ,  $m_1$  и  $m_2$  — те же, что и в теореме 2.11.

§ 5.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ  
ПРОХОЖДЕНИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ В СРЕДАХ  
С ДВУХФОТОННЫМ РЕЗОНАНСОМ.  
КООРДИНАТЫ ( $z, r, t$ )

В § 2 гл. 1 была приведена краткая формулировка задачи о прохождении излучения через двухуровневую среду, когда  $2\omega = \omega_{21} + \nu$  и времена продольной и поперечной релаксаций сравнимы с длительностью импульса. В безразмерных переменных (1.25) — (1.27) переписываются в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau_2} = i[qA^2W - (\Delta - \alpha|A|^2)\rho], \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{W - W_0}{\tau_1} = -4q \operatorname{Im}(A^* \rho), \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} + iD\Delta_r A = -\sqrt{1 + \tilde{\alpha}^2}[(W_0 - W)A + \rho A^*], \quad (2.62)$$

где  $\rho = \rho(z, r, t)$ ,  $W = W(z, r, t)$ ,  $A = A(z, r, t)$ ,  $\tilde{\alpha} = \alpha/2q$ .

Координата  $z$  выбрана вдоль направления распространения волны,  $\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$  — оператор Лапласа по поперечной к направлению распространения волны координате

$$(z, r, t) \in G = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq L_z, |t| \leq T_n\}.$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$A(0, r, t) = A^{(0)}(r, t), \quad (2.63)$$

$$\rho(z, r, -T_n) = 0, W(z, r, -T_n) = W_0 = \text{const} > 0, \quad (2.64)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}(z, 0, t) = A(z, r, \pm T_n) = A(z, R, t) = 0. \quad (2.65)$$

В (2.60) — (2.65)  $A^*$  — комплексно-сопряженная к  $A$  функция,  $\rho$  — внедиагональный элемент матрицы плотности, нормированный на значение инверсной заселенности резонансного перехода невозмущенной молекулы,  $W$  — нормированная разность населенностей уровней 1 и 2,  $D, q, \Delta, \alpha$  — вещественные постоянные, выражающиеся через физические параметры задачи (частоты, волновое число, дипольные моменты).

Введем в области  $G$  сетки

$$\omega = \omega_z \times \omega_r \times \omega_t, \quad \omega' = \omega_z' \times \omega_r \times \omega_t',$$

где

$$\omega_r = \{r = r_j, r_j = (j + 0,5)h_r, j = 0, 1, \dots, N_r - 1,$$

$$h_r = R/(N_r + 0,5),$$

$$\omega_l = \{t=t_l, t_l = \tau l, l = -N_r + 1, \dots, N_r - 1, \tau = T/N_r\},$$

$$\omega_z = \{z=z_k, z_k = kh_z, k=0, 1, \dots, N_z - 1, h_z = L_z/N_z\},$$

$$\omega'_z = \{z'=z'_k, z'_k = (k+0,5)h_z, k=0, 1, \dots, N_z - 1, h_z = L_z/N_z\};$$

$$\omega'_l = \{t=t'_l, t'_l = (l+0,5)\tau, l = -N_r, \dots, N_r - 1, \tau = T/N_r\}.$$

Будем относить функции  $\rho$  и  $W$  из (2.60)–(2.65) к сетке  $\omega'$ , а комплексную амплитуду  $A$  — к  $\omega$ . Тогда с помощью обозначений

$$\hat{\rho} = \rho(z+0,5h_z, r, t+0,5\tau), \quad \bar{\rho} = \rho(z+0,5h_z, r, t-0,5\tau),$$

$$\hat{W} = W(z+0,5h_z, r, t+0,5\tau), \quad \bar{W} = W(z+0,5h_z, r, t-0,5\tau),$$

$$\hat{u} = u(z+h_z, r, t), \quad u = u(z, r, t), \quad \bar{u} = 0,5(\hat{u} + u),$$

$$\bar{\rho} = 0,5(\hat{\rho} + \rho), \quad \bar{W} = 0,5(\hat{W} + W)$$

запишем для задачи (2.60)–(2.65) следующую симметричную двухслойную разностную схему:

$$\frac{\hat{\rho} - \bar{\rho}}{\tau} + \frac{\bar{\rho}}{\tau_2} = i[q\bar{u}^2\bar{W} - (\Delta - \alpha|\bar{u}|^2)\bar{\rho}], \quad (2.66)$$

$$\frac{\hat{W} - \bar{W}}{\tau} + \frac{\bar{W} - W_0}{\tau_1} = -4q \operatorname{Im}(\bar{u}^{*2}\bar{\rho}), \quad (2.67)$$

$$\frac{\hat{u} - u}{h_z} + iD\Delta_r\bar{u} = -\sqrt{1 + \tilde{\alpha}^2}[\tilde{\alpha}(W_0 - \bar{W})\bar{u} + 2\bar{\rho}\bar{u}^*]. \quad (2.68)$$

К уравнениям (2.66)–(2.68) добавляются начальные и граничные условия:

$$u(0, r, t) = A^{(0)}(r, t), \quad u(z, r, \pm(T - \tau)) = 0,$$

$$u(z, R, t) = 0, \quad \rho(z, r, -T + 0,5\tau) = 0, \quad (2.69)$$

$$W(z, r, -T + 0,5\tau) = W_0, \quad (z, r, t) \in \omega \vee \omega'.$$

Для решения разностных уравнений (2.66)–(2.69) используем итерационный процесс в сочетании с прогонкой по  $r$ . Все неизвестные функции, стоящие в правых частях (2.66)–(2.69), будем брать с  $s$ -й итерации, а в левых частях — с  $(s+1)$ -й итерации. Начальные приближения берутся с предыдущего слоя (по  $t'$  для  $\hat{\rho}$  и  $\hat{W}$  и по  $z$  для  $\hat{u}$ ).

**Теорема 2.13.** Пусть при достаточно малых  $\tau \leq \tau_0$  и  $h_z \leq h_z^0$  выполнены условия  $h_z \leq Ch_r$ ,  $\tau \leq Ch_r^2$ . Тогда существует единственное решение системы (2.66)–(2.69), а итерационный процесс для ее решения сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim h_z/h_r + \tau/h_r^2$ . Если  $\tau_1 = \tau_2 = \infty$ , то схема сохраняет длину разностного аналога электродипольного вектора псевдоспина  $4|\rho(z, t)|^2 + W^2(z, t) = W_0^2$ . В приближении плоских волн ( $D=0$ ) при точном резонансе ( $\Delta=0$ ) отсутствие релаксации ( $\tau_1 = \tau_2 = \infty$ ) и начальной фазовой модуляции импульса ( $\text{Im}A=0$ ) приводит, как и в непрерывном случае, к распространению импульса без фазовой модуляции. При этом имеет место разностный аналог теоремы площадей  $(\hat{\theta} - \theta)/h_z = 2W_0(1 - \cos \psi(z + 0,5h_z, T - 0,5\tau))$ , а при достаточно малых шагах  $h_z$  и  $\tau$  сеточная функция площади импульса с начальными значениями  $\theta_0 = 2\pi n$  может меняться в процессе распространения на величину порядка  $h_z^2 + \tau^2$ ,

$$\psi = \sum_{-T \leq t' \leq T} 2 \arctg \left( q \sqrt{1 + \tilde{\alpha}^2} \tilde{u}^2 \tau \right), \quad \theta = 2q \sqrt{1 + \tilde{\alpha}^2} \sum_{|t'| \leq T} u^2 \tau.$$

**Теорема 2.14.** Решение разностной задачи сходится в сеточной норме  $L_2(\omega_r \times \omega_t)$  к достаточно гладкому решению дифференциальной задачи (2.60)–(2.65) со скоростью  $O(\tau^2 + h_z^2 + h_r^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}})$ . В приближении плоских волн ( $D=0$ ,  $A = A(z, t)$ ,  $\rho = \rho(z, t)$ ) решение разностной задачи ограничено константами, не зависящими от шагов сетки, и оно сходится к достаточно гладкому решению дифференциальной задачи в равномерной метрике со скоростью  $O(\tau^2 + h_z^2)$ .

## § 6.

### РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ОБЛАЧНОЙ СРЕДЕ

#### 6.1.

##### Исходные уравнения

Распространение светового пучка в облачной среде описывается следующей системой безразмерных уравнений (см. (1.15)):

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\Delta_{\perp} A = -\tau_d W A - i\alpha T A, \quad (2.70)$$

$$\Phi_T \frac{\partial T}{\partial t} + \chi_T \frac{\partial T}{\partial x} = \Delta_{\perp} T + W|A|^2,$$

$$\Phi_W \frac{\partial W}{\partial t} + \chi_W \frac{\partial W}{\partial x} = \Delta_{\perp} W - \gamma W|A|^2.$$



Рассмотрим два случая. Для аксиально-симметричного распространения, когда  $A, T, W$  зависят от  $(z, r, t)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) = \Delta_r$ ,  $\chi_t, \chi_w = 0$ , начальные условия ставятся следующим образом:

$$\begin{aligned} A(0, r, t) &= A^{(0)}(r, t), \\ W(z, r, 0) &= 1, T(z, r, 0) = A(z, r, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Для «щелевых» пучков  $A, T, W$  зависят от  $(z, x, t)$ ,  $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2$ . Начальные условия имеют вид

$$\begin{aligned} A(0, x, t) &= A^{(0)}(x, t), \\ W(z, x, 0) &= 1, T(z, x, 0) = 0, A(z, x, 0) = 0. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Как и выше, рассматриваются финитные начальные распределения  $A^{(0)}(r, t)$ ,  $A^{(0)}(x, t)$ . Поэтому выбирается такая область  $G = \{0 \leq r \leq R\}$  (или  $G = \{0 \leq x \leq L_x\}$ ), вне которой решение задачи (2.70), (2.71) (или (2.70), (2.72)) будет тривиальным. Таким образом, имеем следующие граничные условия. В координатах  $z, r, t$

$$A(z, R, t) = \frac{\partial A}{\partial r}(z, 0, t) = T(z, R, t) = \frac{\partial T}{\partial r}(z, 0, t) = 0, \quad (2.73)$$

$$W(z, R, t) = 1, \quad \frac{\partial W}{\partial r}(z, 0, t) = 0.$$

В координатах  $(z, x, t)$

$$\begin{aligned} A(z, 0, t) &= A(z, L_x, t) = 0, \\ T(z, 0, t) &= T(z, L_x, t) = 0, \\ W(z, 0, t) &= W(z, L_x, t) = 1. \end{aligned} \quad (2.74)$$

## 6.2.

*Стационарное распространение излучения  
в неподвижной среде.  
Координаты  $(z, r)$*

В этом случае процесс описывается системой уравнений (2.70), где  $\varphi_t, \varphi_w, \chi_t, \chi_w = 0$ ,  $\Delta = \Delta_r$ , совместно с начальным условием

$$A(0, r) = A^{(0)}(r) \quad (2.75)$$

и граничными условиями (2.73), где функции  $A, T, W$  не зависят от  $t$ .

Построим разностную схему для задачи (2.70), (2.73), (2.75). Введем следующие сетки:

$$\omega_z = \{z = z_j = jh_z, j = 0, 1, \dots, N_z - 1, h_z = L_z/N_z\},$$

$$\omega_r = \{r = r_k = (k + 0,5)h_r, k = 0, \dots, N_r - 1, h_r = R/(N_r + 0,5)\}.$$

На сетке  $\omega = \omega_z \times \omega_r$  запишем нелинейную двухслойную разностную схему

$$\frac{\hat{u} - u}{h_z} + i\Lambda_r^{0,5} u = -\tau_d^{0,5} u \bar{W}_h^{0,5} - i\alpha T_h^{0,5} u,$$

$$\Lambda_r \hat{T}_h = -\hat{W}_h |\hat{u}|^2, \quad \Lambda_r \hat{W}_h = \gamma \hat{W}_h |\hat{u}|^2, \quad (2.76)$$

$$(z, r) \in \omega, \quad u(0, r) = A^{(0)}(r),$$

$$u(z, R) = T_h(z, R) = 0, \quad W_h(z, R) = 1. \quad (2.77)$$

Здесь  $\hat{f} = f(z + h_z, r)$ ,  $f = f(z, r)$ ,  $\hat{f}^{0,5} = 0,5(\hat{f} + f)$ ,  $\Lambda_r$  — **самосопряженный разностный оператор Лапласа** на сетке  $\omega_r$  при нулевых граничных условиях в скалярном произведении  $(f, \varphi) = \sum_{\omega_r} r \varphi^* f h_r$ . Уравнения (2.76), (2.77) решаются на новом расчетном слое по  $z$  с помощью итераций и прогонки по  $r$ :

$$\frac{\hat{u}^{s+1} - u^s}{h_z} + i\Lambda_r^{s+1} u^s = -\tau_d^{s, s} u^s \bar{W}_h^{s, s} - i\alpha T_h^{s, s} u^s, \quad (2.78)$$

$$\Lambda_r \hat{T}_h^s = -\hat{W}_h^s |\hat{u}^s|^2, \quad \Lambda_r \hat{W}_h^s = \gamma \hat{W}_h^s |\hat{u}^s|^2,$$

$$\hat{u}^{s+1}(z_j, R) = \hat{T}_h^s(z_j, R) = 0, \quad \hat{W}_h^s(z_j, R) = 1, \quad s = 0, 1, \dots$$

Начальное приближение для  $u$  берется с предыдущего слоя по  $z$ . Условия устойчивости разностной прогонки выполнены.

**Теорема 2.15.** При условии  $h_z \leq C/(\ln h_r^{-1})^2$  существует единственное решение задачи (2.76)—(2.77), а итерационный процесс (2.78) сходится к этому решению в сеточной норме  $L_2$  как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim h_z (\ln h_r^{-1})^2$ .

**Теорема 2.16.** Решение разностной задачи (2.76)—(2.77) сходится к достаточно гладкому решению исходной задачи (2.70), (2.75), (2.73) в сеточной норме  $L_2$  при условии  $h_z \leq C h_r (\ln r^{-1})^{-2}$  со скоростью  $O(h_r^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}})$ .

## 6.3.

*Распространение излучения в движущейся среде.  
Координаты  $(z, x, t)$* 

Нестационарный процесс в движущейся среде в координатах  $(z, x, t)$  описывается системой уравнений (2.70), где  $\Delta_{\perp} = \partial^2/\partial x^2$ , совместно с начальными и граничными условиями (2.72), (2.74). С помощью замены переменных  $W = \overline{W} \exp(\chi_w x/2)$ ,  $T = \overline{T} \exp(\chi_{\tau} x/2)$  приведем (2.70), (2.72), (2.74) к виду

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\tau_{\perp} A \overline{W} \exp(\chi_w x/2) - i \alpha \overline{T} A \exp(\chi_{\tau} x/2), \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} - \frac{1}{\varphi_{\tau}} \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial x^2} + \frac{\chi_{\tau}^2}{4\varphi_{\tau}} \overline{T} = \frac{1}{\varphi_{\tau}} \overline{W} |A|^2 \exp(0,5x(\chi_w - \chi_{\tau})),$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial t} - \frac{1}{\varphi_w} \frac{\partial^2 \overline{W}}{\partial x^2} + \frac{\chi_w^2}{4\varphi_w} \overline{W} = - \frac{\gamma}{\varphi_w} \overline{W} |A|^2,$$

$$A(0, x, t) = A^{(0)}(x, t), \quad \overline{T}(z, x, 0) = A(z, x, 0) = 0, \quad (2.80)$$

$$\overline{W}(z, x, 0) = \exp(-\chi_w x/2),$$

$$A(z, 0, t) = A(z, L_x, t) = \overline{T}(z, 0, t) = \overline{T}(z, L_x, t) = 0,$$

$$\overline{W}(z, 0, t) = 1, \quad \overline{W}(z, L_x, t) = \exp(-\chi_w L_x/2).$$

В дальнейшем черту над функциями  $W, T$  будем опускать. Строим симметричную разностную схему, соответствующую (2.79), (2.80):

$$\frac{\hat{u} - u}{h_z} + i u_{\bar{x}\bar{x}}^{0,5} = -\tau_{\perp} u W_h \exp(\chi_w x/2) - \quad (2.81)$$

$$- i \alpha u T_h \exp(\chi_{\tau} x/2),$$

$$\frac{\hat{T}_h - T_h}{\tau} - \frac{1}{\varphi_{\tau}} T_{h\bar{x}\bar{x}}^{0,5} + \frac{\chi_{\tau}^2}{4\varphi_{\tau}} T_h = \frac{1}{\varphi_{\tau}} \overline{W}_h |u|^2 \exp(0,5x(\chi_w - \chi_{\tau})),$$

$$\frac{\hat{W}_h - W}{\tau} - \frac{1}{\varphi_w} W_{h\bar{x}\bar{x}}^{0,5} + \frac{\chi_w^2}{4\varphi_w} W_h = - \frac{\gamma}{\varphi_w} \overline{W}_h |u|^2$$

на сетке  $\omega' = \omega'_{\tau} \times \omega'_z \times \omega'_x$  для функций  $T, W$ , где

$$\omega'_{\tau} = \{t' = t'_j = (j + 0,5)\tau, \quad j = 0, \dots, N_t - 1, \quad \tau = T_u/N_t\},$$

$$\omega'_z = \{z' = z'_l = (l + 0,5)h_z, \quad l = 0, \dots, N_z - 1, \quad h_z = L_z/N_z\},$$

$$\omega'_x = \{x = x_k = kh, \quad k = 1, \dots, N_x - 1, \quad h = L_x/N_x\},$$

и на сетке  $\omega = \omega_r \times \omega_z \times \omega_x$  для функции  $u$ , где

$$\omega_\tau = \{t = t_j = j\tau, j = 1, \dots, N_t - 1, \tau = T_N/N_t\},$$

$$\omega_z = \{z = z_l = lh_z, l = 0, 1, \dots, N_z - 1, h_z = L_z/N_z\}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\hat{T}_h, \hat{W}_h = T_h, W_h(z + 0,5h_z, x, t + 0,5\tau),$$

$$T_h, W_h = T_h, W_h(z + 0,5h_z, x, t - 0,5\tau),$$

$$\hat{u} = u(z + h_z, x, t), \quad u = u(z, x, t),$$

$$T_h^{0,5} = 0,5(\hat{T}_h + T_h), \quad W_h^{0,5} = 0,5(\hat{W}_h + W_h), \quad u^{0,5} = 0,5(\hat{u} + u).$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$u(0, x, t) = A^{(0)}(x, t), \quad u(z, x, \tau) = T_h(z', x, 0,5\tau) = 0, \quad (2.82)$$

$$W_h(z', x, 0,5\tau) = \exp(-\chi_w x/2),$$

$$u(z, 0, t) = u(z, L_x, t) = T_h(z', 0, t') = T_h(z', L_x, t') = 0,$$

$$W_h(z', 0, t') = 1, \quad W_h(z', L_x, t') = \exp(-\chi_w L_x/2).$$

Нелинейная разностная схема (2.81), (2.82) реализуется на новом расчетном слое по  $z$  с помощью итераций и прогонок:

$$\frac{\hat{u}^{s+1} - u}{h_z} + i u_{xx}^{s+1} = -\tau_d u_{\tau}^{s, s} W_h \exp(\chi_w x/2) - i \alpha u^{s, s} T_h \exp(\chi_\tau x/2), \quad (2.83)$$

$$\frac{\hat{T}_h - T}{\tau} - \frac{1}{\Phi_\tau} T_{hxx}^{0,5} + \frac{\chi_\tau^2}{4\Phi_\tau} T_h^{0,5} = \frac{1}{\Phi_\tau} W_h^{0,5} |u|^{0,5} \exp(0,5x(\chi_w - \chi_\tau)),$$

$$\frac{\hat{W}_h - W}{\tau} - \frac{1}{\Phi_w} W_{hxx}^{0,5} + \frac{\chi_w^2}{4\Phi_w} W_h^{0,5} = -\frac{\gamma}{\Phi_w} W_h^{0,5} |u|^{0,5},$$

$$\hat{u}^{s+1}(z, 0, t) = \hat{u}^{s+1}(z, L_x, t) = \hat{T}^s(z', 0, t') = \hat{T}^s(z', L_x, t') = 0, \quad \hat{W}_h^s(z', 0, t') = 1,$$

$$\hat{W}^s(z', L_x, t') = \exp(-\chi_w L_x/2).$$

Начальное приближение для  $u$  берется с предыдущего слоя по  $z$ . Условия устойчивости разностной прогонки выполнены.

**Теорема 2.17.** При условиях  $\tau \leq Ch^2$ ,  $h_z \leq ch$  существует единственное решение разностной задачи (2.81) — (2.82), а итерационный процесс сходится к этому решению в сеточной норме

$L_2(G)$  как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim h_z h^{-1}$ . Здесь норма определяется как  $\|f\|^2 = \sum_{x \in \omega_x} |f|^2 h$ .

Теорема 2.18. Решение разностной задачи (2.81)–(2.82) сходится к достаточно гладкому решению исходной задачи (2.79)–(2.80) со скоростью  $O(h^2)$  в сеточной норме  $L_2$  при условии  $\tau \leq Ch^2$ ,  $h_z \leq Ch^{3/2}$ .

#### 6.4.

Распространение излучения в неподвижной среде.  
Координаты  $(z, r, t)$

Рассматриваемый процесс описывается системой уравнений (2.70), где  $\chi_r, \chi_w = 0$ ,  $\Delta = \Delta_r$ , с начальными и граничными условиями (2.71), (2.73).

Разностную схему для численного решения исходной задачи строим на сетке  $\omega' = \omega'_r \times \omega'_z \times \omega_r$  для функций  $W, T$  и на сетке  $\omega = \omega_r \times \omega_z \times \omega_r$  для функции  $u$ :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{u} - u}{h_z} + i \Lambda_r u &= -\tau_d u W_h - i \alpha u T_h, \\ \frac{\hat{T}_h - T_h}{\tau} &= \frac{1}{\Phi_r} \Lambda_r T_h + \frac{1}{\Phi_r} W_h |u|^2, \\ \frac{\hat{W}_h - W_h}{\tau} &= \frac{1}{\Phi_w} \Lambda_r W_h - \frac{\gamma}{\Phi_w} W_h |u|^2. \end{aligned} \quad (2.84)$$

В (2.84) используются следующие обозначения:

$$\hat{u} = u(z + h_z, r, t), \quad u = u(z, r, t), \quad u^{0.5} = 0.5(\hat{u} + u),$$

$$\hat{T}_h, \hat{W}_h = T_h, \quad W_h(z + 0.5h_z, r, t + 0.5\tau),$$

$$T_h, W_h = T_h, \quad W_h(z + 0.5h_z, r, t - 0.5\tau),$$

$$T_h^{0.5} = 0.5(\hat{T}_h + T_h), \quad W_h^{0.5} = 0.5(\hat{W}_h + W_h).$$

Начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(0, r, t) &= A^{(0)}(r, t), \quad T_h(z', r, 0.5\tau) = T_h(z', R, t') = 0, \\ u(z, r, \tau) &= u(z, R, t) = 0, \\ W_h(z', r, 0.5\tau) &= W_h(z', R, t') = 1. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Разностное решение на новом расчетном слое по  $z$  получаем с помощью итераций и прогонки по  $r$ :

$$\frac{\hat{u}^{s+1} - u}{h_z} + i \Lambda_r u = -\tau_d u W_h - i \alpha T_h u, \quad (2.86)$$

$$\frac{\hat{T}_h - T_h}{\tau} = \frac{1}{\Phi_\tau} \Lambda_r T_h + \frac{1}{\Phi_\tau} W_h |u|^2, \quad \hat{T}_h(R) = 0,$$

$$\frac{\hat{W} - W}{\tau} = \frac{1}{\Phi_w} \Lambda_r W_h - \frac{\gamma}{\Phi_w} W_h |u|^2, \quad \hat{W}_h(R) = 1, \quad \hat{u}^{s+1}(R) = 0.$$

Начальное приближение для  $u$  берется с предыдущего слоя по  $z$ .

**Теорема 2.19.** При условии  $\tau \leq Ch_r^2$ ,  $h_z \leq Ch_r$  существует единственное решение задачи (2.84), (2.85). Итерационный процесс (2.86) сходится к этому решению в сеточной норме  $L_2$  со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q \sim h_z h_r^{-1}$ .

**Теорема 2.20.** Решение разностной задачи (2.84), (2.85) сходится к достаточно гладкому решению исходной задачи в сеточной норме  $L_2$  со скоростью  $O(h_r^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}})$  при условии  $\tau \leq Ch_r^2$ ,  $h_z \leq Ch_r^2$ .

## 6.5.

*Распространение сканируемого оптического излучения в облачной среде.*

*Координаты  $(z, x, t)$*

Распространение сканируемого оптического излучения в рассматриваемом здесь случае описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\tau_d W A - i \alpha T A, \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (1 + \omega z) \frac{\partial T}{\partial x} = W |A|^2,$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (1 + \omega z) \frac{\partial W}{\partial x} = -\gamma W |A|^2,$$

$$z \in (0, L_z], \quad t \in (0, T_n], \quad x \in (0, L(z, t)),$$

$$L(z, t) = L_x + (1 + \omega z)t.$$

Считаем, что  $\omega > 0$  (результаты настоящего пункта легко переносятся на случай  $\omega < 0$ ). Начальные условия при  $z=0$  и  $t=0$  совпадают с (2.71). Граничные условия имеют вид

$$A(z, 0, t) = A(z, L(z, t), t) = T(z, 0, t) = 0, \quad (2.88)$$

$$W(z, 0, t) = 1.$$

Из второго и третьего уравнений (2.87) видно, что за счет бокового движения среды и сканирования пучка происходит снос возмущений температуры и водности по поперечной координате. Поэтому необходимо рассматривать расширенную область  $x \in (0, L(z, t))$ .

С помощью интегрирования вдоль характеристик

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \omega z$$

нетрудно получить, что

$$T(z, t(x)) = (W(t_0) - W(z, t(x))) / \gamma,$$

где  $t(x) = t_0 + x / (1 + \omega z)$ ,  $t_0 = t$  при  $x < (1 + \omega z)t$ ,  $t_0 = 0$  при  $x \geq (1 + \omega z)t$ .

Таким образом, систему (2.87) можно свести к двум уравнениям:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -ix\gamma^{-1}(1 - W) - \tau_a W A, \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (1 + \omega z) \frac{\partial W}{\partial x} = \gamma W |A|^2$$

с соответствующими начальными и граничными условиями. С помощью преобразования

$$A = \bar{A} e^{-i\omega x t / 2}$$

уравнения (2.89) приводятся к виду

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial z} + \omega t \frac{\partial \bar{A}}{\partial x} + i \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial x^2} = -\tau_a W \bar{A} + i \bar{A} \left( (1 - W) \alpha \gamma^{-1} + \left( \frac{\omega t}{2} \right)^2 \right), \quad (2.90)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + (1 + \omega z) \frac{\partial W}{\partial x} = \gamma W |\bar{A}|^2.$$

Начальные и граничные условия изменяются следующим образом:

$$\bar{A}(0, x, t) = A^{(0)}(x, t) e^{i\omega x t / 2},$$

$$W(z, x, 0) = 1, \quad \bar{A}(z, x, 0) = 0, \quad (2.91)$$

$$\bar{A}(z, 0, t) = \bar{A}(z, L(z, t), t) = 0, \quad W(z, 0, t) = 1.$$

Так как функция  $\bar{A}$  изменяется вдоль тех же характеристик, что и функция  $W$ , удобно воспользоваться методом характеристик (в дальнейшем черта над  $\bar{A}$  опускается).

Введем сетки

$$\bar{\omega} = \omega_z \times \omega_\tau \times \omega_x(z, t) \quad \text{и} \quad \bar{\omega}' = \omega'_z \times \omega'_\tau \times \omega_x(z, t),$$

где

$$\omega_x(z, t) = x_k^{(l, i)} = (1 + \omega z_l) t_{j-1} + x_k^{(0, i)},$$

$$x_k^{(0, i)} = k\tau, \quad k=0, \dots, N_x-1, \quad N_x = \text{entier}\{l_x/\tau\},$$

$$x = x_{-k}^{(l, i)} = (1 + \omega z_l) t_{j-1} + k\tau, \quad k=-1, \dots, -N_x^{(l, i)} + 1,$$

$$N_x^{(l, i)} = \text{entier}\{(1 + \omega z_l) t_{j-1}\}.$$

Видно, что точки сетки  $\omega_x(z, t) x_k^{(l, i)}$  смещаются вдоль характеристик при переходе к новым слоям по  $t$  и по  $z$ . Точки  $x_{-k}^{(l, i)}$  добавляются слева от крайней точки  $x_0^{(l, i)} = (1 + \omega z_l) t_{j-1}$  до левой границы области по  $x$ . Сетка  $\omega'_x(z, t)$  строится аналогично по точкам  $x_k^{(l+0,5, i+0,5)}$ . На сетке  $\bar{\omega}$  будем рассматривать сеточный аналог функции  $A$ , а на  $\bar{\omega}'$  — функции  $W$ . Введем обозначения

$$\hat{u} = u(z_{l+1}, x_{\pm k}^{(l+1, i)}, t_j), \quad u = u(z_l, x_{\pm k}^{(l, i)}, t_j),$$

$$u = 0,5(\hat{u} + u), \quad \hat{W}_h = W_h(z_{l+0,5}, t_{j+0,5}, x_{\pm k}^{(l+0,5, i+0,5)}),$$

$$W_h = W_h(z_{l+0,5}, t_{j-0,5}, x_{\pm k}^{(l+0,5, i-0,5)}),$$

$$\overset{0,5}{W}_h = 0,5(\hat{W}_h + W_h).$$

Используя их, построим следующую симметричную нелинейную разностную схему, аппроксимирующую (2.90), (2.91):

$$\frac{\hat{u} - u}{h_z} + i \overset{0,5}{u}_{x_x} = -\tau_a \overset{0,5}{W}_h \overset{0,5}{u} - i \left( \alpha \gamma^{-1} (1 - \overset{0,5}{W}_h) + \left( \frac{\omega t_j}{2} \right)^2 \right) \overset{0,5}{u}, \quad (2.92)$$

$$\frac{\hat{W}_h - W_h}{\tau} = \gamma \overset{0,5}{W}_h \overset{0,5}{|u|^2}, \quad u(0, x_{-k}^{(0, i)}, t_j) = 0,$$

$$u(0, x_k^{(0, i)}, t_j) = A^{(0)}(x_k^{(0, i)}, t_j) e^{i \omega x_k^{(0, i)} t_j / 2},$$

$$W_h(z_{l+0,5}, x_{\pm k}^{(l+0,5, 0,5)}, 0,5\tau) = 1, \quad (2.93)$$



$$u(z_l, x_{\pm k}^{(l,1)}, \tau) = 0, W_h(z_{l+0,5}, x_{-N_x^{(l+0,5, l+0,5)}}^{(l+0,5, l+0,5)}, t_{l+0,5}) = 1,$$

$$u(z_l, x_{-N_x^{(l, l)}}^{(l, l)}, t_l) = u(z_l, L(z_l, t_l), t_l) = 0.$$

Отметим, что количество точек по  $x$  на верхнем и нижнем слоях по  $z$  и  $t$ , вообще говоря, не совпадает. Так как  $\omega > 0$ , то  $N_x^{(l, l)} \leq N_x^{(l+1, l)}$ ,  $N_x^{(l+0,5, l-0,5)} \leq N_x^{(l+0,5, l+0,5)}$ . Поэтому в схеме (2.92) присутствуют „лишние“ точки по  $x$ , на нижних слоях — по  $z$  и  $t$ . В соответствии с граничными условиями полагаем, что в этих точках функция  $u$  равна нулю, а функция  $W_h$  — единице.

Схема реализуется с помощью итераций и прогонки. Все функции с верхнего слоя во втором уравнении (2.92) и правая часть первого уравнения берутся с  $s$ -й итерации, а в левой части первого уравнения — с  $(s+1)$ -й. Начальное приближение  $u$  берется с предыдущего слоя по  $z$ .

**Теорема 2.20'.** При условии  $h_z \leq h_z^0$  существует единственное решение разностной задачи (2.92) — (2.93), а итерационный процесс сходится к этому решению со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $q \sim h_z$  в сеточной норме  $L_2$ .

**Теорема 2.21.** Решение разностной задачи (2.92), (2.93) сходится к достаточно гладкому решению задачи (2.90), (2.91) со скоростью  $O(\tau^2)$  в сеточной норме  $L_2$  при условии  $h_z \leq C\tau^{0,5}$  и  $0,5\gamma\|u(z=0)\|^2 < 1$ . Последнее условие теоремы 2.21 справедливо для реальных значений физических величин, через которые выражаются  $\gamma$  и начальное распределение  $A^{(0)}(x, t)$ .

## § 7.

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВНУТРИРЕЗОНАТОРНОГО УДВОЕНИЯ ЧАСТОТЫ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

#### 7.1.

##### Внутриврезонаторная ГВГ

в аксиально-симметричном случае

с учетом различия групповых скоростей

в активной среде. Координаты  $(z, r, t)$

Рассмотрим резонатор, состоящий из двух плоских зеркал, расположенных параллельно друг другу, считая, что ось резонатора совпадает с координатной осью  $z$ , а зеркало 1 и 2 расположены в плоскостях  $z=0$  и  $z=L_z$  соответственно. Внутри резонатора размещены активная среда ( $0 \leq z \leq l$ ) и нелинейный кристалл ( $l \leq z \leq L$ ), обладающий квадратичной нелинейностью. В активной среде возбуждается квазимонохроматическая волна с частотой  $\omega$ . Нелинейность кристалла приводит к возбуждению в нем излучения на частоте  $2\omega$ . В результате в резонаторе проис-

ходит взаимодействие четырех волн: основной волны, волны второй гармоники и соответствующих отраженных волн. Все они распространяются вдоль оси резонатора, обладают аксиальной симметрией и разными групповыми скоростями в активной среде.

В квазиоптическом приближении процесс внутрирезонаторной ГВГ описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_{1A} \frac{\partial A_1}{\partial z} + iD_1 \Delta_r A_1 = -i\alpha p, \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} - v_{1A} \frac{\partial A_2}{\partial z} + iD_1 \Delta_r A_2 = -i\alpha q,$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial t} + v_{2A} \frac{\partial A_3}{\partial z} + iD_2 \Delta_r A_3 = 0, \quad \frac{\partial A_4}{\partial t} - v_{2A} \frac{\partial A_4}{\partial z} + iD_2 \Delta_r A_4 = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\kappa p + i\gamma A_1 N, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = -\kappa q + i\gamma A_2 N,$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = d - 2\beta(\text{Im } A_1^* p + \text{Im } A_2^* q) - N, \quad 0 \leq z \leq l,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_n \frac{\partial A_1}{\partial z} + i\Delta_r A_1 = -iA_1^* A_3,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} + v_n \frac{\partial A_2}{\partial z} + i0,5\Delta_r A_2 = -iA_1^2, \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial t} - v_n \frac{\partial A_3}{\partial z} + i\Delta_r A_3 = -iA_2^* A_4,$$

$$\frac{\partial A_4}{\partial t} - v_n \frac{\partial A_4}{\partial z} + i0,5\Delta_r A_4 = -iA_2^2,$$

$$l < z < L_z, \quad \Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right).$$

Здесь  $A_{1,3}$ ,  $A_{2,4}$  — безразмерные амплитуды основной волны, волны второй гармоники и соответствующих отраженных волн;  $p$  и  $q$  — безразмерные амплитуды поляризации среды прямой и отраженной волн;  $N$  — нормированная инверсная населенность уровня 2 (рассматривается двухуровневая система  $v_{1A}$ ,  $v_{2A}$  — величины, пропорциональные групповым скоростям основной волны и волны второй гармоники в активной среде);  $v_n$  — величина, пропорциональная групповой скорости волн в кристалле. Коэффициенты  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\kappa$ ,  $d$  — положительные константы, выражающиеся через физические параметры задачи.

Граничные условия на зеркалах имеют вид

$$\begin{aligned} A_1(0, r, t) &= R_1 A_2(0, r, t), \quad A_3(0, r, t) = \\ &= R_2 A_4(0, r, t), \quad A_2(L, r, t) = P_1 A_1(L, r, t), \\ A_4(L, r, t) &= P_2 A_3(L, r, t), \\ |R_1|, |R_2|, |P_1|, |P_2| &\leq 1. \end{aligned} \quad (2.96)$$

При  $t=0$  задаются начальные условия

$$\begin{aligned} N(z, r, 0) &= 1, \quad p(z, r, 0) = q(z, r, 0) = 0, \\ A_2(z, r, 0) &= A_4(z, r, 0) = A_3(z, r, 0) = 0, \\ A_1(z, r, 0) &= A^{(0)}(z, r). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Здесь  $R_1, R_2, P_1, P_2$  — коэффициенты отражения.

Так как изучаются пространственно-ограниченные пучки с финитными начальными распределениями, то можно считать, что  $r \in G_r \{r: 0 \leq r \leq R\}$ , причем

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{1,3}}{\partial r}(z, 0, t) &= \frac{\partial A_{2,4}}{\partial r}(z, 0, t) = A_{1,3}(z, R, t) = \\ &= A_{2,4}(z, R, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.98)$$

В области  $G_{rzt} = G_r \times \{0 \leq z \leq L_z\} \times \{0 \leq t \leq T_H\}$  введем следующие сетки:

$$\begin{aligned} \omega_{z1} &= \{z_{j_1} = j_1 h_1, j_1 = 0, \dots, N_{z1}, h_1 = l/N_{z1}\}, \\ \omega_{z2} &= \{z_{j_2} = j_2 h_2, j_2 = 0, \dots, N_{z2}, h_2 = h_1 v_{2A}/v_{1A}\}, \\ \omega_z &= \{z_j = jh + l, j = 0, \dots, N_z, h = h_1 v_H/v_{1A}\}, \\ \omega_t &= \{t_m = m\tau, m = 0, \dots, N_T, \tau = h_1/v_{1A}\}, \\ \omega_r &= \{r_n = (n + 0,5)h_r, n = 0, \dots, N_r - 1, h_r = R/(N_r + 0,5)\}. \end{aligned}$$

Используя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= u_1(z, r, t + \tau), & u_1 &= \begin{cases} u_1(z - h_1, r, t), & 0 < z \leq l, \\ u_1(z - h, r, t), & l < z \leq L_z, \end{cases} \\ \bar{u}_1 &= (\hat{u}_1 + u_1)/2, \\ \hat{u}_2 &= u_2(z, r, t + \tau), & u_2 &= \begin{cases} u_2(z + h_1, r, t), & 0 \leq z < l, \\ u_2(z + h, r, t), & l \leq z < L_z, \end{cases} \\ \bar{u}_2 &= (\hat{u}_2 + u_2)/2, \\ \hat{u}_3 &= u_3(z, r, t + \tau), & u_3 &= \begin{cases} u_3(z - h_2, r, t), & 0 < z \leq l, \\ u_3(z - h, r, t), & l < z \leq L_z, \end{cases} \\ \bar{u}_3 &= (\hat{u}_3 + u_3)/2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_4 &= u_4(z, r, t + \tau), \quad u_4 = \begin{cases} u_4(z + h_2, r, t), & 0 \leq z < l, \\ u_4(z + h, r, t), & l \leq z \leq L_z, \end{cases} \\ \bar{u}_4 &= (\hat{u}_4 + u_4)/2; \end{aligned}$$

$$\hat{p}_h = p_h(z, r, t + \tau), \quad p_h = p_h(z, r, t), \quad \bar{p}_h = (\hat{p}_h + p_h)/2,$$

$$\hat{q}_h = q_h(z, r, t + \tau), \quad q_h = q_h(z, r, t), \quad \bar{q}_h = (\hat{q}_h + q_h)/2,$$

$$\hat{N}_h = N_h(z, r, t + \tau), \quad N_h = N_h(z, r, t),$$

$$\bar{N}_h = (\hat{N}_h + N_h)/2,$$

запишем двухслойную симметричную нелинейную разностную схему для задачи (2.94) — (2.98):

$$\frac{\hat{u}_1 - u_1}{\tau} + iD_1 \Lambda_r \bar{u}_1 = -i\alpha \bar{p}_h, \quad (2.99)$$

$$\frac{\hat{u}_2 - u_2}{\tau} + iD_1 \Lambda_r \bar{u}_2 = -i\alpha \bar{q}_h,$$

$$\frac{\hat{u}_3 - u_3}{\tau} + iD_2 \Lambda_r \bar{u}_3 = 0, \quad \frac{\hat{u}_4 - u_4}{\tau} + iD_2 \Lambda_r \bar{u}_4 = 0,$$

$$\frac{\hat{p}_h - p_h}{\tau} = -\bar{x} \bar{p}_h + i\bar{\gamma} \bar{u}_1 \bar{N}_h, \quad \frac{\hat{q}_h - q_h}{\tau} = -\bar{x} \bar{q}_h + i\bar{\gamma} \bar{u}_2 \bar{N}_h,$$

$$\frac{\hat{N}_h - N_h}{\tau} = d - 2\beta (\text{Im } \bar{u}_1^* \bar{p}_h + \text{Im } \bar{u}_2^* \bar{q}_h) - \bar{N}_h, \quad 0 < z < l,$$

$$\frac{\hat{u}_1 - u_1}{\tau} + i\Lambda_r \bar{u}_1 = -i\bar{u}_1^* \bar{u}_3, \quad (2.100)$$

$$\frac{\hat{u}_3 - u_3}{\tau} + i0,5 \Lambda_r \bar{u}_3 = -i\bar{u}_1^2,$$

$$\frac{\hat{u}_2 - u_2}{\tau} + i\Lambda_r \bar{u}_2 = -i\bar{u}_2^* \bar{u}_4,$$

$$\frac{\hat{u}_4 - u_4}{\tau} + i0,5 \Lambda_r \bar{u}_4 = -i\bar{u}_2^2, \quad l < z < L_z.$$

Начальные и граничные условия принимают вид

$$\begin{aligned} u_1(0, r, t) &= R_1 u_2(0, r, t), \quad u_3(0, r, t) = R_2 u_4(0, r, t), \\ u_2(L, r, t) &= P_1 u_1(L, r, t), \quad u_4(L, r, t) = P_2 u_3(L, r, t), \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$N_h(z, r, 0) = 1; \quad p_h(z, r, 0) = q_h(z, r, 0) = u_2(z, r, 0) = 0,$$

$$u_4(z, r, 0) = u_3(z, r, 0) = 0, \quad (2.102)$$

$$u_1(z, r, 0) = u_{10}(z, r),$$

$$u_1(z, R, t) = u_3(z, R, t) = u_2(z, R, t) = 0, \quad (2.103)$$

$$u_4(z, R, t) = 0.$$

Для нахождения решения (2.99) — (2.103) на новом слое по  $t$  используется итерационный процесс в сочетании с прогонкой по  $r$ . Все неизвестные функции на верхнем слое, стоящие в левых частях уравнений (2.99) — (2.100), берем с  $(s+1)$ -й итерации, а в правых частях — с  $s$ -й.

**Теорема 2.22.** При условии  $\tau \leq Ch_r^2$  существует единственное решение задачи (2.99) — (2.103), а итерационный процесс сходится к решению этой задачи как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim \tau h_r^{-2}$ .

**Теорема 2.23.** Решение задачи (2.99) — (2.103) сходится к достаточно гладкому решению задачи (2.94) — (2.98) в точной норме  $L_2(G_{rzt})$  со скоростью  $O(\tau^3 + h_r^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}})$  при условии  $\tau \leq \tau_0$ , где  $\tau_0 = \text{const} > 0$ .

## 7.2.

*Внутриврезонаторная ГВГ с учетом  
двулучепреломления. Координаты  $(x, y, z)$*

В уравнениях (2.94), (2.95) положим  $\partial p / \partial t = \partial q / \partial t = 0$ ,  $v_{1A} = v_{2A} = v_H$ . Оператор  $\Delta_r$  заменим на  $\Delta_{\perp} = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ . После несложных преобразований получим уравнения, описывающие рассматриваемый процесс:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + i D_1 \Delta_{\perp} A_1 = \frac{\alpha A_1}{1 + \beta(|A_1|^2 + |A_2|^2)}, \quad (2.104)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + i D_2 \Delta_{\perp} A_3 = 0,$$

$$-\frac{\partial A_2}{\partial z} + i D_1 \Delta_{\perp} A_2 = \frac{\alpha A_2}{1 + \beta(|A_1|^2 + |A_2|^2)}, \quad (2.105)$$

$$-\frac{\partial A_4}{\partial z} + i D_2 \Delta_{\perp} A_4 = 0, \quad 0 < z < l,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + i \Delta_{\perp} A_1 = -i A_1^* A_3, \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial A_3}{\partial z} + i 0,5 \Delta_{\perp} A_3 + \xi \frac{\partial A_3}{\partial x} = -i A_1^2,$$

$$-\frac{\partial A_2}{\partial z} + i \Delta_1 A_2 = -i A_2^* A_4,$$

$$-\frac{\partial A_4}{\partial z} + i 0,5 \Delta_1 A_4 + \xi \frac{\partial A_4}{\partial x} = -i A_2^2, \quad l < z < L. \quad (2.107)$$

Здесь слагаемые  $\xi \frac{\partial A_2}{\partial x}$ ,  $\xi \frac{\partial A_4}{\partial x}$  описывают двулучепреломление;  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\xi$  — положительные константы.

Граничные условия имеют вид

$$A_1(0, x, y) = R_1 A_2(0, x, y), \quad A_3(0, x, y) = R_2 A_4(0, x, y), \quad (2.108)$$

$$A_2(L, x, y) = P_1 A_1(L, x, y), \quad A_4(L, x, y) = P_2 A_3(L, x, y),$$

$$|R_1|, |R_2|, |P_1|, |P_2| \leq 1,$$

$$A_{1,3}(z, 0, y) = A_{1,3}(z, L_x, y); \quad A_{1,3}(z, x, 0) = A_{1,3}(z, x, L_y), \quad (2.109)$$

$$A_{2,4}(z, 0, y) = A_{2,4}(z, L_x, y),$$

$$A_{2,4}(z, x, 0) = A_{2,4}(z, x, L_y).$$

Считаем, что  $(x, y) \in G_{xy} = \{0 \leq x \leq L_x\} \{0 \leq y \leq L_y\}$ . Так как при  $z=0$  и  $z=L$  заданы условия связи (2.108), то для решения задачи (2.104) — (2.109) будем использовать следующий алгоритм, который назовем внешним итерационным процессом.

**Этап 1.** Пусть известны некоторые  $A_2^{s-1}(z, x, y)$ ,  $A_4^{s-1}(z, x, y)$ .

Положим  $A_1^{s-1}(0, x, y) = R_1 A_2^{s-1}(0, x, y)$ ,  $A_3^{s-1}(0, x, y) = R_2 A_4^{s-1}(0, x, y)$ .

**Этап 2.** Решаем задачу (2.104), (2.106), (2.109) с начальными условиями, заданными на этапе 1, относительно  $A_1^s(z, x, y)$ ,  $A_3^s(z, x, y)$ . Находим  $A_1^s(L, x, y)$ ,  $A_3^s(L, x, y)$ .

**Этап 3.** Считаем, что  $A_2^s(L, x, y) = P_1 A_1^s(L, x, y)$ ,  $A_4^s(L, x, y) = P_2 A_3^s(L, x, y)$ .

**Этап 4.** Решаем задачу (2.105), (2.107), (2.109) с начальными условиями, заданными на этапе 3, относительно  $A_2^s(z, x, y)$ ,  $A_4^s(z, x, y)$ . Находим  $A_2^s(0, x, y)$ ,  $A_4^s(0, x, y)$ . Повторяем описанный процесс.

Для данного итерационного процесса существует равномерная ограниченность итераций при всех  $0 \leq z \leq L_z$ . Таким образом, из последовательности итераций можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Будем решать задачи, возникающие на этапах 2 и 4 внешне-итерационного процесса, численно с использованием спектрального метода. В качестве базисных функций выберем экспоненты. В этом случае коэффициенты Фурье определяются из решения следующих разностных задач:

$$\frac{(u_1^k)^{n+1} - (u_1^k)^n}{h_z} - i\lambda_k D_1(U_1^k)^n = F_1^k(U_1^n, U_1^n, U_2^n), \quad (2.110)$$

$$\frac{(u_3^k)^{n+1} - (u_3^k)^n}{h_z} - i\lambda_k D_2(U_3^k)^n = 0, \quad 0 < z \leq l,$$

$$\frac{(u_1^k)^{n+1} - (u_1^k)^n}{h_z} - i\lambda_k (U_1^k)^n = F_2^k((U_1^*)^n, U_3^n), \quad (2.111)$$

$$\frac{(u_3^k)^{n+1} - (u_3^k)^n}{h_z} - i(0,5\lambda_k - \xi \sqrt{\lambda_k})(U_3^k)^n = F_2^k(U_1^n, U_1^n),$$

$$(u_{1,3}^k)^0 = (A_{1,3}^k)^0, \quad l < z \leq L_z,$$

$$- \frac{(u_2^k)^{n+1} - (u_2^k)^n}{h_z} - i\lambda_k D_1(U_2^k)^n = F_1^k(U_2^n, U_1^n, U_2^n), \quad (2.112)$$

$$- \frac{(u_4^k)^{n+1} - (u_4^k)^n}{h_z} - i\lambda_k D_2(U_4^k)^n = 0, \quad 0 \leq z < l,$$

$$- \frac{(u_2^k)^{n+1} - (u_2^k)^n}{h_z} - i\lambda_k (U_2^k)^n = F_2^k((U_2^*)^n, U_4^n), \quad (2.113)$$

$$- \frac{(u_4^k)^{n+1} - (u_4^k)^n}{h_z} - i(0,5\lambda_k - \xi \sqrt{\lambda_k})(U_4^k)^n = F_2^k(U_2^n, U_2^n),$$

$$l \leq z < L. \quad (2.114)$$

$$(u_{2,4}^k)^{N_z} = (A_{2,4}^k)^{N_z}. \quad (2.115)$$

Здесь  $F_1(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = \alpha\theta_1/(1 + \beta(|\theta_2|^2 + |\theta_3|^2))$ ,  $(U_{1,3}^k)^n = 0,5((u_{1,3}^k)^{n+1} + (u_{1,3}^k)^n)$ ,  $(U_{2,4}^k)^n = 0,5((u_{2,4}^k)^{n+1} + (u_{2,4}^k)^n)$ ,  $U_{1,3}^n = 0,5(u_{1,3}^{n+1} + u_{1,3}^n)$ ,  $\lambda_{kx} = 4\pi^2(k_x/L_x)^2$ ,  $U_{2,4} = 0,5(u_{2,4}^{n+1} + u_{2,4}^n)$ ,  $F_2(\theta_1, \theta_2) = -i\theta_1\theta_2$ ,  $\lambda_k = 4\pi^2[(k_x/L_x)^2 + (k_y/L_y)^2]$ ,  $(u_{1,2}^k)^n$ ,  $(u_{3,4}^k)^n$  — коэффициенты Фурье функций  $u_{1,2}(z_n, x, y)$ ,  $u_{3,4}(z_n, x, y)$  соответственно.

На этапе 2 переход с  $n$ -го слоя на  $(n+1)$ -й осуществляется с помощью метода простой итерации. Незвестные функции, стоящие в левых частях уравнений (2.112), (2.113), на верхнем слое берутся с  $(s+1)$ -й итерации, а в правых — с  $s$ -й. Переход с  $(n+1)$ -го слоя на  $n$ -й на этапе 4 осуществляется аналогично. Эти итерационные процессы назовем внутренними.

**Теорема 2.24.** При условии  $h_z \leq C h_x h_y$  существуют единственное решение задачи (2.110)–(2.114) и единственное решение задачи (2.111), (2.113)–(2.115), а внутренние итерационные процессы сходятся к решению этих задач как геометрическая прогрессия со знаменателем  $q \sim h_z/h_x h_y$ .

Пусть решение дифференциальной задачи на этапе 2 внешнего итерационного процесса и решение на этапе 4 имеют  $m_x$  непрерывных производных по  $x$  и  $m_x$  непрерывных производных по  $y$ , причем каждая из этих производных на концах соответствующих интервалов  $((0, L_x), (0, L_y))$  имеет одно и то же значение, а  $(m_x+1)$ -е и  $(m_y+1)$ -е производные кусочно-непрерывны.

**Теорема 2.25.** *Решение разностной задачи (2.110), (2.112) — (2.114) сходится к решению дифференциальной задачи на этапе 2, а решение задачи (2.111), (2.113) — (2.115) сходится к решению дифференциальной задачи на этапе 4 при  $h_z \leq h_z^0$  в сеточной норме  $L_2(G_{xy})$  со скоростью  $O(h_z^2 + |H|^m)$ , где  $|H|^m = h_x^{m_x-1} + h_y^{m_y-1}$ .*

### § 8.

#### РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Для наглядности ограничимся случаем двух компонент  $M=2$ , который соответствует, например, реакции диссоциации исходного вещества и широко исследуется в реальных физических экспериментах. Для простоты будем считать, что обратная реакция также отсутствует, что не ограничивает общность дальнейших рассуждений. Тогда химическую реакцию можно характеризовать одной функцией  $N$ -концентрацией одного из взаимодействующих веществ, например продукта реакции. Концентрация второго вещества равна при этом  $1-N$ . В этом случае система (1.17) — (1.21) принимает вид

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\Delta_{\perp} A = F_1 = -A\{i\alpha T(N\varepsilon + (1-\varepsilon)/2) + i(N - N_0)(\beta + \alpha\gamma(N\varepsilon + (1-\varepsilon)/2)) + \delta(\mu N + (1-\mu)/2)\}, \quad (2.116)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = F_3 = \xi(1-N)e^{-\frac{T_n}{T_n + T + \gamma(N-N_0)}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = |A|^2(\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2)(\mu N + (1-\mu)/2) = F_2,$$

$$\varepsilon = (\alpha_1 - \alpha_2)/(\alpha_1 + \alpha_2), \quad \mu = (\tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2)/(\tilde{\delta}_1 + \tilde{\delta}_2),$$

$$\beta = \beta_1 - \beta_2, \quad \delta = \delta_i/\tilde{\delta}_i, \quad i = 1, 2,$$

с начальными условиями

$$A(z, r, 0) = T(z, r, 0) = 0, \quad N_f(z, r, 0) = N_f^0. \quad (2.117)$$



Введем в области  $G = \{0 \leq z \leq L_z\} \{0 \leq r \leq R\} \{0 \leq t \leq T_u\}$  сетки

$$\begin{aligned}\omega_z &= \{z = z_j = jh_z, j = 0, 1, \dots, N_z, h_z = L_z/N_z\}, \\ \omega_r &= \{r = r_k = (k + 0,5)h_r, k = 0, 1, \dots, N_r, h_r = R/(N_r + 0,5)\}, \\ \omega_t &= \{t = t_l = \tau l, l = 0, \dots, N_t, \tau = T_u/N_t\}, \\ \omega'_z &= \{z = z_{j+0,5} = (j + 0,5)h_z, j = 0, 1, \dots, N_z - 1, \\ &\quad h_z = L_z/N_z\}, \\ \omega'_t &= \{t = t_{l+0,5} = (l + 0,5)\tau, l = 0, 1, \dots, N_t - 1, \tau = T_u/N_t\}.\end{aligned}$$

Запишем для задачи (2.116) с граничными и начальными условиями (2.117) разностную схему

$$\begin{aligned}\frac{\hat{u} - u}{h_z} + i\Lambda_r u &= F_1^{0,5}(u, N, T), \\ \frac{\hat{T} - T}{\tau} &= F_2^{0,5}(|u|^2, N), \quad \frac{\hat{N} - N}{\tau} = 0,5(F_3(\hat{T}, \hat{N}) + F_3(T, N)).\end{aligned}\quad (2.118)$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\hat{u} &= u(z + h_z, r, t + 0,5\tau), \quad u = u(z, r, t + 0,5\tau), \\ |u|^2 &= 0,5(|\hat{u}|^2 + |u|^2), \quad \hat{u} = 0,5(\hat{u} + u), \\ \hat{T} &= T(z + 0,5h_z, r, t + \tau), \quad T = T(z + 0,5h_z, r, t), \\ \hat{N} &= N(z + 0,5h_z, r, t + \tau), \quad N = N(z + 0,5h_z, r, t), \\ \hat{T} &= 0,5(\hat{T} + T), \quad \hat{N} = 0,5(\hat{N} + N).\end{aligned}\quad (2.119)$$

Система уравнений нелинейна, и для ее решения организуем следующий итерационный процесс с использованием метода простой итерации и метода прогонки по поперечной координате:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{u}^{s+1} - u^s}{h_z} + i\Lambda_r u^s &= F_1^{s+1}(u^s, N_h^s, T_h^s), \\ \frac{\hat{T}^s - T_h^s}{\tau} &= F_2^{s+1}(|u^s|^2, N_h^s), \quad \frac{\hat{N}^s - N_h^s}{\tau} = 0,5(F_3(\hat{T}^s, \hat{N}^s) + F_3(T_h^s, N_h^s)).\end{aligned}\quad (2.120)$$

$$s = 0, 1, \dots$$

Начальные значения для итераций берутся с предыдущего по  $z$  слоя.

Теорема 2.26. При выполнении условий

$$h_z \leq C_1 h_r, \quad \tau \leq C_2 h_r^2$$

существует единственное решение задачи (2.118), (2.119), а итерационный процесс (2.120) сходится к этому решению как геометрическая прогрессия со знаменателем  $\bar{q} \sim h_z/h_r + \tau/h_r^2$ .

Теорема 2.27. При отсутствии поглощения световой энергии схема (2.118) консервативна. При наличии же поглощения разностный аналог полной мощности ограничен.

Теорема 2.28. Решение задачи (2.118), (2.119) сходится к достаточно гладкому решению исходной задачи со скоростью  $O(h_z^2 + \tau^2 + h_r^2 \sqrt{\ln h_r^{-1}})$  в сеточной норме  $L_2$  при условии  $h_z \tau \leq C h_r^3$ .

#### § 9.

#### НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ДРУГИХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Прежде всего отметим, что изложенные выше результаты содержатся в [5—18]. Построенные разностные схемы реализованы на ЭВМ БЭСМ-6. Их эффективность подтверждена многочисленными расчетами.

Естественно, что рассматриваемый здесь круг задач не включает в себя всех имеющихся на практике проблем. Численное моделирование той или иной задачи нелинейной оптики может иметь специфические особенности, которые будут предъявлять дополнительные требования к численным методам. Различные методы численного анализа нелинейного взаимодействия световых пучков с веществом рассмотрены в [19—33; 39—42]. Работы [1; 34—38] являются базой для построения консервативных разностных схем и их теоретического анализа.

Заметим, что в настоящее время большинство исследователей, занимающихся численным моделированием распространения оптического излучения, используют метод расщепления по физическим факторам (подробно с ним можно познакомиться в [3]). Это обстоятельство связано, по-видимому, с простотой реализации и экономией машинной памяти (по сравнению с изложенными здесь методами). Однако метод расщепления до последнего времени не был обоснован, и большинство расчетов проводилось с малыми начальными значениями нелинейности  $|\alpha| \sim 50$  на трассах  $z \leq 0,25$  (типичное значение  $|\alpha| = 10 \div 20$ ). Большинство авторов, использующих этот метод, не приводят значений инвариантов в проводимых расчетах, а имеющиеся в литературе данные показывают, что в ряде задач (например, для расчета солитонов, волноводов и т. д.) метод расщепления неприемлем. Следовательно, в ближайшее время необходимо провести сравнение метода расщепления и изложенных в настоящей главе численных методов. Целесообразно также построить для рас-

чета распространения световых пучков разностные схемы на основе метода суммарной аппроксимации. Предварительные оценки показывают их высокую эффективность.

Еще одно замечание необходимо сделать относительно расчетов дефокусировки пучка для больших нелинейностей  $|\alpha| \sim 10^3 - 10^7$ . В этом случае быстро развивается абберационная картина: первоначально гауссов пучок приобретает изрезанный кольцевой профиль с увеличивающимся по мере распространения узким максимумом. Расчет самовоздействия пучков при таких нелинейностях по изложенным здесь схемам возможен, но он требует больших затрат ресурсов ЭВМ. С помощью же метода расщепления он может быть выполнен на значительно меньшей (по сравнению с предыдущим случаем) трассе распространения и, как правило, прекращается при достижении максимума интенсивности некоторого значения. По-видимому, в этой ситуации целесообразно использовать методику авторов работ [25—28], развитую для исследования самофокусировки пучков в керровской среде. Вообще в нелинейной оптике существует в настоящее время ряд задач, в которых решение в малых интервалах изменения пространственных и временной переменных (по сравнению с характерными первоначальными значениями параметров пучка) имеет большие градиенты. Примерами таких задач могут служить распространение оптического излучения в химически активной газовой среде, фокусировка световых пучков сегментированными зеркалами, а также тепловая дефокусировка световых пучков при больших нелинейностях.

Кроме этого сейчас недостаточно полно и точно изучены процессы самовоздействия коротких световых импульсов, распространение пучков в околозвуковых течениях. Таким образом, имеется обширный круг задач и трудностей, которые необходимо решить в ближайшее время с помощью численного моделирования.

---

## Глава 3

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ОПТИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

### § 1.

#### СВЯЗАННЫЕ СОЛИТОНЫ И КВАЗИСОЛИТОНЫ В СРЕДАХ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Во втором приближении теории дисперсии резонансное взаимодействие трех импульсов в среде с квадратичной нелинейностью описывается уравнениями (1.6) при  $N=3$ ,  $\mathcal{L}_m(x, y)=0$ ,  $\mathcal{L}_m(\eta)$  определяется по (1.8) и правыми частями (см. (1.9)):

$$P_1 = E_3 E_2^* \exp(i\Delta z l_d), \quad P_2 = E_3 E_1^* \exp(i\Delta z l_d),$$

$$P_3 = E_1 E_2 \exp(-i\Delta z l_d),$$

где  $\Delta = (k_1 + k_2 - k_3) l_d$  — безразмерная расстройка волновых чисел. Для данного типа взаимодействия можно доказать существование трехпараметрического семейства стационарных решений, соответствующих основным модам солитонов, распространяющихся с общей групповой скоростью  $V_c$  без изменения амплитудных профилей [16]. Эти решения имеют вид

$$E_j = E_{cj}(\eta_c) e^{-i\Gamma_j z + i\Omega_j \eta_c}, \quad \Omega_j = \frac{1}{2D_j} (V_j^{-1} - V_c^{-1}), \quad (3.1)$$

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_3.$$

Здесь  $\eta_c = t - z/V_c$  — местное время в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью солитонов  $V_c$ . Для удобства в (3.1) выделен экспоненциальный множитель, соответствующий сдвигу средних частот импульсов на  $\Omega_j$  (в этом случае в уравнения для комплексных амплитуд солитонов  $E_{cj}$  не входят первые производные).

Отметим, что амплитуды солитонов пропорциональны отношению коэффициентов нелинейности и дисперсии. В отличие от волноводов, которые всегда замедлены, солитоны будут замедляться или ускоряться в среде в зависимости от знака дисперсии групповой скорости на соответствующих частотах: фазовые скорости будут уменьшаться, если  $\frac{\partial}{\partial \omega_j} \left( \frac{1}{V_j} \right) < 0$ , и увеличиваться, если  $\frac{\partial}{\partial \omega_j} \left( \frac{1}{V_j} \right) > 0$ . Что касается групповой скорости солитонов, то она может отстоять от  $V_j$  — груп-

повой скорости  $j$ -й волны — на величину, много меньшую  $(|D_j|K_j)^{1/2}$ , где  $D_j = (-\partial^2 K_j / \partial \omega_j^2)^{1/2}$ .

Функции  $E_{cj}$  удовлетворяют следующей системе безразмерных уравнений:

$$\frac{d^2 A_{c1}}{d\eta^2} - A_{c1} = A_{c3} A_{c2}^* e^{-i\bar{\Omega}\eta}, \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2 A_{c2}}{d\eta^2} - \alpha_2 A_{c2} = -A_{c3} A_{c1}^* e^{-i\bar{\Omega}\eta}, \quad \frac{d^2 A_{c3}}{d\eta^2} - \alpha_3 A_{c3} = -A_{c1} A_{c2} e^{i\bar{\Omega}\eta}$$

с краевым условием  $\lim_{\eta \rightarrow \pm\infty} |A_{cj}(\eta)| = 0$ , где

$$\tau_i = \eta_c / \tau_c, \quad E_{cj} = \frac{1}{\tau_c^2} \left( \frac{\gamma_j D_1 D_2 D_3}{D_j \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \right)^{1/2} A_{cj}; \quad \tau_c = (\Gamma_1 / D_1 - \Omega_1^2)^{-1/2},$$

$$\bar{\Omega} = \Omega \tau_c, \quad \Omega = \Omega_1 + \Omega_2 - \Omega_3,$$

$$\bar{\Omega} = ((V_1^{-1} - V_c^{-1})D_1^{-1} + (V_2^{-1} - V_c^{-1})D_2^{-1} - (V_3^{-1} - V_c^{-1})D_3^{-1}) / (4\Gamma_1 D_1^{-1} - (V_1^{-1} - V_c^{-1})^2 D_1^{-2})^{1/2},$$

$$\alpha_2 = \frac{4\Gamma_2 D_2^{-1} - (V_2^{-1} - V_c^{-1})^2 D_2^{-2}}{4\Gamma_1 D_1^{-1} - (V_1^{-1} - V_c^{-1})^2 D_1^{-2}},$$

$$\alpha_3 = \frac{4(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Delta/l_h)D_3^{-1} - (V_3^{-1} - V_c^{-1})^2 D_3^{-2}}{4\Gamma_1 D_1^{-1} - (V_1^{-1} - V_c^{-1})^2 D_1^{-2}}.$$

Область существования солитонов в пространстве параметров  $\alpha_2, \alpha_3, \bar{\Omega}$  находится из условий действительности и положительности величин  $\tau_c, V_c$ .

Исследуем некоторые вопросы формирования солитонов.

### 1.1.

*Формирование солитонов в случае равенства групповых скоростей волн ( $V_1 = V_2 = 0$ )*

Так как исходные уравнения допускают одновременное изменение знака у двух комплексных амплитуд  $E_j$ , то при  $D_j > 0$  помимо решений с положительными амплитудными профилями, которые условно можно назвать синфазными, существуют решения, у которых амплитудные профили двух волн отрицательны (в противофазе к третьей волне). Аналогично для случая  $D_j < 0$  кроме отрицательных решений имеются решения, для которых две из функций  $E_j$  положительны.

При отсутствии начальной расстройки волновых векторов ( $\Delta = 0$ ) и групповом синхронизме одновременное изменение знаков у  $E_{cj}$ ,  $D_j$  и  $\Gamma_j$  не меняет исходных уравнений. Таким образом, амплитудные профили решений, соответствующих случа-

ям  $D_j > 0$  и  $D_j < 0$  с точностью до знака, совпадают. При этом им соответствует одинаковый по абсолютной величине, но противоположный по знаку сдвиг волновых векторов.

Пусть  $D_j > 0$ . Тогда минимальное значение интеграла  $I_3$  при любом фиксированном суммарном потоке энергии  $I_1$  должно достигаться на солитонных профилях волн, оно отрицательно и равно

$$I_3^{\min} = -0,6 I_1^{5/3} / C_1^{2/3}. \quad (3.3)$$

Здесь  $C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 V_j^2(x) dx$ , а  $V_j(x)$  находятся из уравнений

$$D_j / \gamma_j \frac{d^2 V_j}{dx^2} - V_j = -V_1 V_2 V_3 / V_j, \quad x = \sqrt{\mu} \eta_c, \quad (3.4)$$

$\mu$  определяет среднюю длительность солитонов,  $E_{cj} = \mu V_j(x)$ . Действительно, уравнения Эйлера для вариационной задачи

$$\delta(I_3 + \mu I_1) = 0$$

совпадают с уравнениями (3.2) для солитонов с добавками к волновым числам  $\Gamma_j = \mu \gamma_j$ . Таким образом, экстремальное значение  $I_3$  при  $I_1 = \text{const}$  соответствует солитонному режиму распространения волн.

Определим минимальную величину интеграла  $I_3$  при постоянном значении  $I_1$ . Для  $I_1$  и  $I_3$  имеем

$$I_1(\mu) = \mu^{3/2} C_1, \quad I_3 = \mu^{5/2} C_2,$$

где

$$C_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (-2V_1 V_2 V_3 + \sum_{j=1}^3 D_j / \gamma_j (dV_j / dx)^2) dx.$$

Отсюда

$$I_3 = I_1^{5/3} C_2 / C_1^{5/3}. \quad (3.5)$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  связаны между собой. Для записи этой связи необходимо умножить (3.4) на  $V_j$  и проинтегрировать по  $x$ . Продифференцировав (3.4) по  $x$ , затем умножив на  $x V_j(x)$  и проинтегрировав по  $x$ , получим еще одно соотношение для  $C_1$  и  $C_2$ . Сложив эти выражения, получим

$$5C_2 + 3C_1 = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) следует (3.3) для  $I_3$ . Видно, что минимальное значение интеграла  $I_3$  при любом фиксированном  $I_1$  отрицательно.

Длительность солитонов, реализующих минимум  $I_3$  при постоянном суммарном потоке энергии  $I_1$ , оценивается по формуле

$$\tau_c \cong \mu^{-1/2} = (0,6 I_1 / |I_3^{\min}|)^{1/2}$$

и имеет, таким образом, конечную величину.

## 1.2. Специальные солитоны

При анализе свойств солитонов особое внимание обращают на себя солитоны с действительными огибающими  $E_{cj}$ , существование которых возможно при выполнении условия  $\Omega=0$ . Это однозначно определяет их групповую скорость:

$$\Gamma_c^c = (D_1^{-1} + D_2^{-1} - D_3^{-1}) / (D_1^{-1} V_1^{-1} + D_2^{-1} V_2^{-1} - D_3^{-1} V_3^{-1}).$$

Отметим, что специальные солитоны обладают замечательной особенностью, выделяющей их среди всех остальных. Оказывается, что сдвиг средних частот на  $\Omega_j^c = (V_j^{-1} - V_c^{-1}) / (2D_j)$  эквивалентен установлению для них группового синхронизма.

Можно показать, что если гамильтониан  $I_3$  исходной системы уравнений (см. (3.2)) имеет минимум при фиксированных значениях Мэнли—Роу  $I_{3j}$  (и, следовательно, при фиксированном потоке энергии  $I_1$ ), то он реализуется на специальных солитонах.

Действительно, уравнения Эйлера  $\delta(I_3 + \mu_1 I_{31} + \mu_2 I_{32}) = 0$  совпадают с уравнениями (3.4) для солитонных профилей, соответствующих импульсам с определенными фазовыми скоростями:  $\Gamma_1 = \mu_1 \gamma_1$ ,  $\Gamma_2 = \mu_2 \gamma_2$ . Следовательно, все стационарные точки функционала  $I_3 + \mu_1 I_{31} + \mu_2 I_{32}$  содержатся среди решений системы (3.4). Кроме того, при фиксированных амплитудных профилях строгий минимум  $\pm I_3$  (знак плюс соответствует  $D_j > 0$ , минус —  $D_j < 0$ ) достигается, когда фазовая модуляция отсутствует, и средняя частота каждого импульса сдвигается на величину  $\Omega_j$ , соответствующую специальным солитонам:

$$\Omega_j^c = \frac{(V_j^{-1} - V_1^{-1})/D_1 + (V_j^{-1} - V_2^{-1})/D_2 - (V_j^{-1} - V_3^{-1})/D_3}{2D_j/D_1 + 2D_j/D_2 - 2D_j/D_3},$$

$$\Phi_j^c(\eta_c, z) = \Omega_j^c \eta_c - \Gamma_j z.$$

Иными словами,  $\pm I_3(|E_j|, \Phi_j) > \pm I_3(|E_j|, \Phi_j^c)$ , если  $\Phi_j \neq \Phi_j^c$ . Действительно, интеграл  $I_3$  можно представить таким образом:

$$I_3(B_j, \Phi_j) = \int (-2B_1 B_2 B_3 \cos \Phi + \frac{\Delta I_3}{\gamma_3} B_3^2 + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{D_j}{\gamma_j} \left( B_j^2 \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_c} \right)^2 + \left( \frac{\partial B_j}{\partial \eta_c} \right)^2 \right) - \frac{(V_j^{-1} - V_c^{-1})}{\gamma_j} B_j^2 \right)) d\eta_c, \quad E_j \equiv B_j \exp(i\Phi_j).$$

Разность  $I_3(B_j, \Phi_j) - I_3(B_j, \Phi_j^c)$  равна

$$I_3(B_j, \Phi_j) - I_3(B_j, \Phi_j^c) = \int (2 B_1 B_2 B_3 (1 - \cos \Phi) + \\ + \sum_{j=1}^3 \frac{D_j}{\gamma_j} B_j^2 \left( \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_c} \right)^2 - \frac{\gamma_{jc}}{D_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_c} + \frac{\gamma_{jc}^2}{4 D_j^2} \right)) d\eta_c.$$

Пусть  $D_j > 0$ . Так как детерминант трехчлена

$$\left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_c} \right)^2 - \frac{(V_j^{-1} - V_c^{-1})}{D_j} \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta_c} - \frac{(V_j^{-1} - V_c^{-1})}{4 D_j} \right)$$

равен нулю, то для всех  $\Phi_j \neq \Phi_j^c$   $I_3(B_j, \Phi_j) > I_3(B_j, \Phi_j^c)$ . Для  $D_j < 0$   $-I_3(B_j, \Phi_j) > -I_3(B_j, \Phi_j^c)$ . Ввиду того что групповая скорость специальных солитонов определена, их свойства характеризуются двумя, а в вырожденном случае одним параметром  $\alpha_3$ , входящим в уравнение для огибающих (3.2).

### 1.3.

*Условие захвата модулированных волн  
в параметрически связанные квазисолитоны*

Знание интегралов взаимодействия позволяет, когда все коэффициенты дисперсионного расщепления одного знака, оценить области возможных значений максимумов полей взаимодействующих волн  $M_j(z) = \max_{\eta} |A_j(\eta, z)|$ . Они определяются неравенствами (верхний и нижний знаки соответствуют положительным и отрицательным коэффициентам  $D_j$ )

$$M_j - \frac{M_j^4 |D_j|}{4 \gamma_j I_1^2} > \mp \frac{I_3}{I_1} + \frac{\Delta \mp |\Delta|}{2 \gamma_3} - \max_j \frac{(1/V_j - 1/V_3)}{4 \gamma_j |D_j|}. \quad (3.7)$$

Следовательно, пиковые амплитуды волн могут колебаться в определенных пределах. Докажем это неравенство.

Пусть  $D_j > 0$ . Из интеграла  $I_3$  следует неравенство

$$2 \int B_1 B_2 B_3 \cos \Phi d\eta \geq -I_3 - \frac{|\Delta| - \Delta}{2 \gamma_3} I_1 + \int \sum_{j=1}^3 \frac{D_j}{\gamma_j} \left( \frac{\partial B_j}{\partial \eta} \right)^2 d\eta + \\ + \int \sum_{j=1}^3 B_j^2 \left[ \frac{D_j}{\gamma_j} \left( \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{(V_j^{-1} - V_3^{-1})}{\gamma_j} \frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta} \right] d\eta. \quad (3.8)$$



Для оценки снизу правой части (3.8) в последнем слагаемом выделим полный квадрат, а также отметим, что в силу неравенства Коши-Буняковского

$$\int \sum_{j=1}^3 \frac{D_j}{\gamma_j} \left( \frac{\partial B_j}{\partial \eta} \right)^2 d\eta > \frac{1}{4I_1} \sum_{j=1}^3 D_j / \gamma_j M_j^4$$

и

$$2 \int B_1 B_2 B_3 \cos \Phi d\eta \leq \max_{\eta} B_j I_1.$$

Используя эти соотношения, получаем неравенство (3.7). Аналогично рассматривается случай  $D_j < 0$ .

Решая неравенства (3.7), находим возможные значения максимальных амплитуд волн:

$$M_j^{\min} \leq M_j \leq M_j^{\max},$$

$$M_j^{\min} = M_j^0 \frac{\xi_j}{\sqrt{2}} \left( 1 - \left( \frac{2\sqrt{2}}{\xi^3} - 1 \right)^{1/2} \right),$$

$$M_j^{\max} = M_j^0 \frac{\xi}{\sqrt{2}} \left( 1 + \left( \frac{2\sqrt{2}}{\xi^3} - 1 \right)^{1/2} \right),$$

$$\xi_j = \left( \left( 1 + \left( 1 - \left( \frac{4C_1}{3M_j^0} \right)^3 \right)^{1/2} \right)^{1/3} + \left( 1 - \left( 1 - \left( \frac{4C_1}{3M_j^0} \right)^3 \right)^{1/2} \right)^{1/3} \right)^{1/2},$$

$$M_j^0 = \frac{\gamma_j^{1/3}}{|D_j|} I_1^{2/3}, \quad C_1 = \mp \frac{I_3}{I_1} + \frac{\Delta \mp |\Delta|}{2\gamma_3} - \max_j \frac{(V_i^{-1} - V_3^{-1})^2}{4\gamma_j |D_j|}.$$

В качестве достаточного условия взаимного захвата волн можно использовать неравенство

$$\mp \frac{I_3}{I_1} + \frac{\Delta \mp |\Delta|}{2\gamma_3} - \max_j \frac{(V_i^{-1} - V_3^{-1})^2}{4\gamma_j |D_j|} > 0. \quad (3.9)$$

Таким образом, для осуществления режима захвата волны должны нести отрицательный интеграл  $\pm I_3$ , по модулю превышающий некоторую константу, зависящую от параметров среды. Это требование одновременно является условием, накладываемым на интенсивность волн, входящих в нелинейную среду, — они должны быть больше определенных значений.

Анализ результатов численных экспериментов позволил выявить ряд общих закономерностей, связанных с формированием многочастотных солитонов:

1. При удалении групповой скорости солитонов от групповых скоростей  $V_j$  при неизменной длительности энергия солитонов возрастает.

2. Среди солитонов, распространяющихся с одинаковой групповой скоростью, меньшая энергия соответствует солитонам с большей длительностью (меньшим сдвигом фазовых скоростей).

3. Специальным солитонам соответствуют минимальные средние энергии  $I_1$  и интеграла  $I_3$ .

4. Солитоны с групповыми скоростями, равноотстоящими от скорости специальных солитонов, имеют одинаковую суммарную энергию  $I_1$ , а их профили оказываются комплексно-сопряженными.

#### 1.4.

#### *Проблема устойчивости солитонов*

Как уже отмечалось, пределы возможных колебаний максимумов амплитуд волн определяются величинами  $I_1$ ,  $I_3$  и значениями констант взаимодействия. Конечность этих интервалов при выполнении условия (3.9) позволяет говорить об устойчивости солитонов. При возмущениях, не нарушающих выполнения условия взаимного захвата волн, распада на невзаимодействующие волны и их рассасывания в среде не произойдет, хотя профили в общем случае и не будут сохраняться.

Подчеркнем еще раз, что при фиксированных амплитудных профилях строгий минимум  $I_3$  при фиксированных энергиях импульсов, интегралах Мэнли — Роу или суммарной плотности энергии, если он существует, реализуется на специальных солитонах. Таким образом, как следует из теоремы Ляпунова, специальные солитоны устойчивы относительно возмущений фаз, так как при этом энергия остается постоянной.

Можно показать, что специальные солитоны устойчивы также по отношению к возмущениям произвольного вида, не меняющих энергии импульсов. Для этого интеграл  $I_3$  для них должен быть меньше, чем для импульсов любой другой структуры, но с теми же плотностями энергии. Покажем, что для специальных солитонов интеграл  $I_3$  равен

$$I_3^{cc} = - \sum_{j=1}^3 \frac{6\Gamma_j D_j + (V_j^{-1} - V_3^{-1})^2}{10\gamma_j D_j} P_j, \quad P_j = \int B_j^2 d\eta. \quad (3.10)$$

Действительно,

$$I_3^{cc} = \int \left( -2B_1 B_2 B_3 + \frac{\Delta}{\gamma_3} B_3^2 + \sum_{j=1}^3 \left( \frac{D_j}{\gamma_j} \left( \frac{dB_j}{d\eta} \right)^2 - \frac{(V_j^{-1} - V_3^{-1})^2}{4\gamma_j D_j} B_j^2 \right) \right) d\eta. \quad (3.11)$$

Из уравнений (3.2) для амплитуд специальных солитонов следует

$$\int \left( \frac{D_j}{\gamma_j} \left( \frac{dB_j}{d\eta} \right)^2 + \frac{D_j}{\gamma_j} \alpha_j B_j^2 \right) d\eta = 3 \int B_1 B_2 B_3 d\eta. \quad (3.12)$$

С другой стороны,

$$\sum_{j=1}^3 \left( \frac{D_j}{\gamma_j} \left( \frac{dB_j}{d\eta} \right)^2 - \frac{D_j}{\gamma_j} \alpha_j B_j^2 \right) + 2B_1 B_2 B_3 = 0$$

для всех  $\eta$ .

Проинтегрировав последнее равенство от  $-\infty$  до  $\infty$  и сложив с предыдущим, получим

$$\int \sum_{j=1}^3 \frac{D_j}{\gamma_j} \left( \frac{dB_j}{d\eta} \right)^2 d\eta = \frac{1}{2} \int B_1 B_2 B_3 d\eta.$$

После вычитания будем иметь

$$\int \sum_{j=1}^3 \frac{D_j}{\gamma_j} \alpha_j B_j^2 d\eta = \frac{5}{2} \int B_1 B_2 B_3 d\eta. \quad (3.13)$$

Из (3.11) и (3.12) следует

$$I_3^{cc} = \int \left( B_1 B_2 B_3 - \sum_{j=1}^3 \frac{\Gamma_j}{\gamma_j} B_j^2 \right) d\eta. \quad (3.14)$$

Используя (3.13), из последнего равенства получаем (3.10).

Пусть  $D_j > 0$ . Учитывая положительность  $\alpha_j$  как коэффициентов уравнений (3.2) для солитонных профилей, выражение (3.10) для  $I_3^{cc}$ , а также элементарные неравенства, оценивающие различные члены в интеграле  $I_3$  ( $B_j$ ,  $\varphi_j$ ), получаем

$$I_3(B_j, \varphi_j) - I_3^{cc} \geq \sum_{j=1}^3 \left( -\frac{I_1}{3} M_j + \frac{D_j}{4\gamma_j I_1} M_j^4 \right). \quad (3.15)$$

Таким образом, достаточным условием устойчивости специальных солитонов при фиксированных плотностях энергии на каждой частоте можно считать условие

$$M_j > \sqrt[3]{\frac{4I_1^2 \gamma_j}{3D_j}}. \quad (3.16)$$

Это означает, что специальные солитоны устойчивы по отношению к таким возмущениям, которые не меняют плотности энергии импульсов и оставляют пиковые амплитуды волн  $M_f$  достаточно большими. Фактически это соответствует тому, что условие захвата не должно нарушаться.

## § 2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ ПРИ ОДНОФОТОННОМ РЕЗОНАНСЕ

В настоящем параграфе проанализируем стационарное распространение гауссова пучка ( $A(z=0, r) = e^{-r^2}$ ) при однофотонном резонансе в случае однородной линии поглощения (усиления). Для повышения эффективности проведения численного моделирования целесообразно сначала провести качественный анализ картины различных режимов самовоздействия на основе безабберационного приближения [1]. Тогда при некоторых условиях [1] безразмерная ширина первоначально коллимированного пучка будет описываться следующим уравнением:

$$(a'(L))^2 = \frac{16(a^2(L) - 1)(a^2(L)/V + 1)}{a^2(L)(1 + a^2(L)/x_1 y_1)},$$

$$V^{-1} = \frac{1 - y_1/(1 + x_1 y_1)}{x_1 y_1}, \quad (3.17)$$

где  $x_1$  — отношение характерной нелинейной длины к конфокальному параметру гауссова пучка,  $y_1$  — отношение начальной мощности пучка к критической мощности, определяющей порог самофокусировки.

Заметим, что световые пучки распространяются таким образом, чтобы правая часть (3.17) была неотрицательной. Поэтому при  $V > 0$  пучок расплывается, а при  $V < 0$  его поперечный радиус осциллирует с амплитудой между 1 и  $\sqrt{|V|}$ . Условие  $V = -1$  определяет режим волноводного распространения пучков ( $a(L) = 1$ ). Значения параметров, соответствующих этим режимам, удобно изобразить на плоскости  $\{x_1, y_1\}$  (рис. 1). Они делят первую четверть плоскости, изображенную на рисунке, на три области. Пунктир определяет границу насыщения нелинейности  $x_1 y_1 = 1$ .

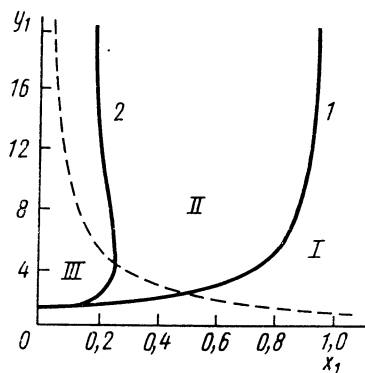


Рис. 1. Области различных режимов самовоздействия при ОФР:  
I)  $a(L) \geq 1$ ; II)  $1 \leq a(L) \leq \sqrt{|v|}$ ;  
III)  $\sqrt{|v|} \leq a(L) \leq 1$

При отстройках частоты от поглощающего перехода в низкочастотную область (параметры  $x_1$  и  $y_1$  в этом случае отрицательны) световые пучки самофокусируются. Если частота света больше частоты резонансного перехода ( $x_1$  и  $y_1 > 0$ ), то световые пучки любой мощности, для которых  $x_1 > 1$ , расплываются. При  $0 < x_1 < 1$  в зависимости от их начальной мощности (параметра  $y_1$ ) захватываются в осциллирующий волновод либо с радиусом пучка  $1 \leq a(L) \leq \sqrt{|\bar{V}|}$  (область II), либо с радиусом  $\sqrt{|\bar{V}|} \leq a(L) \leq 1$ . Граница областей II и III (кривая 2) дает волноводный режим распространения (световые пучки самоканализируются).

Отметим, что захват в нелинейный волновод и осцилляции ширины световых пучков с расстоянием при сильном насыщении однофотонного перехода наблюдались экспериментально в [2].

Проведенный качественный анализ был подтвержден численными экспериментами, в которых решалось следующее безразмерное уравнение:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - i\Delta_r A = -\frac{2i}{x_1} \frac{1 - i\theta_1^{-1}}{1 + x_1 y_1 |A|^2} A \quad (3.18)$$

с гауссовым начальным профилем пучка. Здесь  $\theta_1$  — безразмерная отстройка частоты излучения от частоты перехода. Из них, в частности, следует, что в области III выводы безабберационной теории справедливы. Однако в области II осцилляций не было обнаружено: пучки монотонно расплывались, но их расходимость была меньше дифракционной расходимости пучка в свободном пространстве. Результаты численных экспериментов для пучков с различной начальной мощностью и с постоянной шириной и частотой (параметры  $x_1$  и  $\theta_1$  постоянны в экспериментах) представлены на рис. 2.

Из анализа рисунка следует, во-первых, что самофокусировка в активной среде происходит на частотах, меньших резонансной, во-вторых, что порог самофокусировки равен  $y_1 = 1,5$ . Начиная с  $y_1 > 2$  заметны осцилляции ширины пучка, частота и размах которых нарастают с увеличением начальной мощности оптического излучения, причем ее минимальное значение в перетяжке существенно не меняется, оставаясь на уровне 0,1. Наблюдение за эволюцией профиля интенсивности пучка показало, что он периодически становится кольцевым, что и приводит к осцилляциям радиуса. Подчеркнем, что минимальный размер пучка один и тот же для активной и пассивной сред и определяется эмпирической зависимостью

$$(a(L))_{\min} \sim (0,5 x_1 \ln 2)^{1/2}. \quad (3.19)$$

С ростом параметра  $x_1$  увеличивается также и период осцилляций  $a(L)$ .

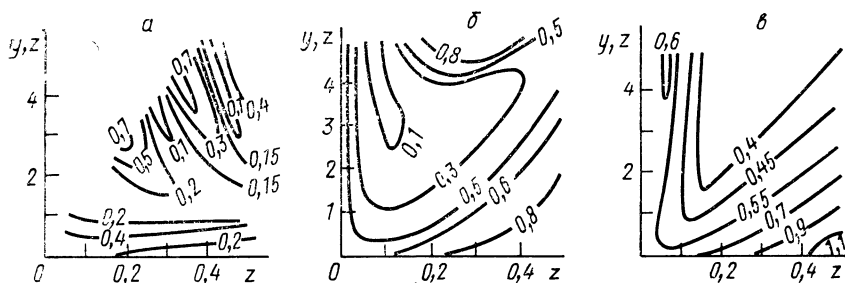


Рис. 2. Линии постоянного радиуса  $a(L)$  светового пучка при ОФР в активной (а, в) и пассивной (б) средах:  $x_1=0,01$  (а, б),  $0,05$  (в);  $\theta=-100$  (а, в),  $100$  (б)

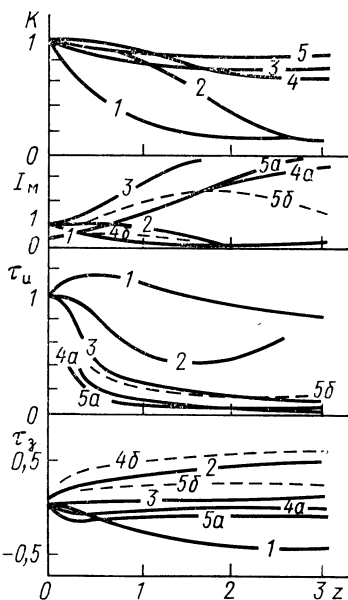


Рис. 3. Зависимость прозрачности среды  $K(z)$ , максимальных значений интенсивности импульсов  $I_{mj}$ , длительностей  $\tau_{nj}$  и времен задержки  $\tau_{zj}$  — импульсов субимпульсов от длины  $z$  в случае  $\tau_1=10\tau_2$ ,  $\tau_1=10$ ,  $\Delta=0$ ,  $\omega_0=\pi$  (1),  $2\pi$  (2),  $3\pi$  (3),  $4\pi$  (4),  $5\pi$  (5)

### § 3.

#### КОГЕРЕНТНАЯ САМОФОКУСИРОВКА В СРЕДАХ С ДВУХФОТОННЫМ РЕЗОНАНСОМ

В настоящем параграфе рассматривается ситуация, когда времена продольной и поперечной релаксации среды сравнимы с длительностью импульса. Эффекты дифракции и нелинейного отклика протяженной поглощающей среды совместно обуславливают когерентную самофокусировку пучка (СФ) [3; 4]. Нами исследовался процесс распространения импульсов с гауссовым распределением амплитуды поля по радиусу  $r$  и по времени  $t$  и с плоским фазовым на входе в среду.

Введем следующие функции, описывающие процесс распространения пучка в нелинейной среде:

$$w(z, r) = \int_{-\infty}^{\infty} |A(z, r, t)|^2 dt / \int_{-\infty}^{\infty} |A(0, 0, t)|^2 dt \quad (3.20)$$

— относительная плотность энергии в кольце с радиусом  $r$ ,

$$\mathcal{E}_0(z) = 2q \sqrt{1 + \bar{\alpha}^2} \int_0^{\infty} r dr \int_{-\infty}^{\infty} |A(z, r, t)|^2 dt \quad (3.21)$$

— энергия пучка,

$$a_{\text{эф}}(z) = \sqrt{\mathcal{E}_0(z)/w(z, 0)} \quad (3.22)$$

— эффективная ширина пучка, а также локальные характеристики:

$\Lambda$  — фокальное расстояние,

$$w_{\text{л}} = w(\Lambda, 0), \quad \mathcal{E}_{0\text{л}} = \mathcal{E}_0(\Lambda), \quad a_{\text{эф}} = a_{\text{эф}}(\Lambda). \quad (3.23)$$

Рассмотрим сначала результаты численного эксперимента с параметрами  $D=0,001$ ,  $\tau_1=\tau_2=\infty$ ,  $\Delta=0$ ,  $w_0=2\pi$ . На длинах поглощения  $z \leq 1,5$  плотность энергии лучей на расстояниях  $r \leq 0,2$  от оси пучка фактически не меняется. В этой области осуществляется режим СИП распространения, приводящий вследствие поперечной связи лучей к пространственным и временным искажениям фазы. В связи с уменьшением прозрачности среды для импульсов с  $w(0, r) < 2\pi$  протяженность области возникновения искривленных фазовых поверхностей сокращается с ростом  $r$ . При этом фазовые вариации еще слишком малы для того, чтобы вызвать заметный поперечный поток энергии внутрь пучка. Второй этап отличается сильным взаимодействием соседних лучей. Поперечный поток энергии к оси из импульсов с  $r > 0,1$  приводит к самофокусировке пучка. На расстояниях  $z > 2$  эти лучи быстро затухают.

На третьем этапе,  $z > \Lambda_1$ , приосевые импульсы поглощаются в среде. Наряду с ростом осевой плотности энергии эффект СИП—СФ приводит к резкому уменьшению эффективного радиуса  $a_{\text{эф}}$ . Он достигает абсолютный минимум в главном фокусе  $\Lambda=2,65$ . В последующих сгущениях плотности энергии эффективная ширина пучка также имеет относительные минимумы. Спад  $a_{\text{эф}}$  на этапе СИП распространения связан с поглощением краевых импульсов пучка. Здесь и полная энергия быстро уменьшается. На этапе самофокусировки пучок теряет уже меньше энергии благодаря ее сильному поперечному потоку к оси.

Сокращение области самофокусировки с ростом отношения нелинейной и дифракционной длины ( $D$ ) приводит к ограничению накапливающегося нелинейного отклика. Тем самым уменьшается когерентно поглощенная энергия пучка  $\mathcal{E}_0(0) - \mathcal{E}_{0\text{л}}$ , а эффективная ширина  $a_{\text{эф}}(\Lambda)$  в фокусе растет.

Ряд численных экспериментов был проведен для  $D=0,001$  с учетом релаксационных процессов ( $\tau_1=10\tau_2$ ). При  $\tau_2 \leq 2$  эффект когерентной нестационарной самофокусировки не наблюдался. При  $\tau_2 \geq 10$  процессы, связанные со сбоем фаз квантовых осцилляторов, фактически не влияют на СИП—СФ. С ростом продольной релаксации ( $\tau_1$ ) самовоздействие заметно уменьшается.

В заключение приведем результаты исследования влияния отстройки несущей частоты  $\Delta$  от центра линии перехода на эффект СИП—СФ для пучка с параметрами  $\omega_0=2\pi$ ,  $D=0,001$  в безрелаксационном приближении. Когерентная нестационарная самофокусировка имеет место в пределах частотного сдвига относительно центра линии  $\Delta \sim (-0,5 \div 0,3)$ . Тем самым СИП—СФ возникает независимо от знака частотной отстройки. Максимальный эффект достигается при отстройках  $\Delta_{\text{опт}} \approx (-0,2 \div 0,3)$ . При этом эффективная ширина пучка в фокусе имеет минимальное значение. Сравнивая с результатами [4; 5] для однофотонных процессов, получим сходство абсолютного значения оптимальных расстройек. Однако аналогично стационарным и квазистационарным процессам в средах с двухфотонным резонансным поглощением знак отстройки  $\Delta_{\text{опт}}$  обратный. Кроме того, область значений, в которой возможен эффект СИП—СФ, оказывается более узкой, чем в однофотонном резонансе. Из численных экспериментов следует, что фокальная плотность энергии на оси пучка  $\omega_d$  в процессах с оптимальной отстройкой  $\Delta_{\text{опт}}$  достигает величин, превышающих соответствующие значения в точном резонансе ( $\Delta=0$ ). Объяснение этого факта заключается в том, что предварительная расстройка резонанса сама по себе приводит к модуляции фазы. В результате возникает поперечный поток энергии даже без учета дифракции. Этот поток усиливает эффект самофокусировки в области частот ниже половины резонансной частоты перехода. Вблизи резонанса, где двухфотонная связь излучения с веществом наиболее сильная, потери энергии заметно растут. Зависимость полной энергии пучка от значений частотной отстройки  $\Delta$  еще раз подчеркивает существенную разницу между СИП—СФ и квазистационарными процессами самовоздействия.

#### § 4.

#### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

#### РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ ГАЗОВОЙ СРЕДЕ

При воздействии оптического излучения на химически активные среды могут иметь место существенно неравновесные процессы, которые, как правило, бистабильны по многим параметрам как светового пучка, так и среды [6]. Отметим, что сложность анализа проблемы стимулирования химических реакций оптическим излучением существенно ограничивает круг задач, поддающихся исследованию традиционными аналитическими методами. По этой причине в подавляющем большинстве работ



рассматривалось распространение световых пучков с однородным пространственным распределением в оптически тонкой кювете и без учета динамики химической реакции. Следует, однако, отметить, что на этом пути достигнут большой прогресс в понимании происходящих процессов и получен ряд принципиальных результатов. Для подробного знакомства с этой областью целесообразно прочитать работы [6; 7], авторы которых провели также многочисленные лабораторные эксперименты, сравнивая их результаты с результатами теоретического анализа. Тем не менее полный анализ распространения световых пучков в химически активных средах может быть выполнен на основе численного моделирования. В качестве иллюстрации ниже приводятся некоторые результаты численного моделирования для случая распределенной нелинейной среды при протекании обратимой химической реакции в трехкомпонентной  $A + B \xrightleftharpoons[k_c]{k_A} C$

и двухкомпонентной  $A \xrightleftharpoons[k_B]{k_A} B$  в смесях газов. Показана возможность наблюдения эффекта локализации химической реакции.

Для нормированных концентраций  $N_A, N_B, N_C$  реагирующих веществ в отсутствие их диффузии и термодиффузии справедлива следующая система уравнений:

$$\frac{\partial N_C}{\partial t} = N_A N_B e^{-\frac{1}{T}} - k N_C e^{-\frac{T_c}{T}}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial N_{B, A}}{\partial t} = -N_A N_B e^{-\frac{1}{T}} + k N_C e^{-\frac{T_c}{T}}.$$

Здесь  $t = k_A \bar{t}$ ;  $\bar{t}$  — «размерное» время;  $T$  измеряется в энергиях активации прямой реакции  $T_A$ ;  $T_c$  — отношение энергий активации обратной и прямой реакций;  $k = k_c/k_A$  характеризует скорость обратной реакции. Отметим, что в случае двухкомпонентной среды в (3.24) необходимо либо  $N_B$ , либо  $N_A$  положить равным 1.

Систему (3.24) необходимо дополнить уравнением для изменения температуры:

$$\eta \frac{\partial T}{\partial t} = qI(\delta_4 + \delta_1 N_A + \delta_2 N_B + \delta_3 N_C) - T + T_0 \quad (3.25)$$

и интенсивности светового пучка вдоль оси распространения:

$$\frac{\partial I}{\partial z} + \delta I(\delta_4 + \delta_1 N_A + \delta_2 N_B + \delta_3 N_C) = 0, \quad (3.26)$$

где  $\eta$  характеризует отношение скорости уменьшения температуры смеси за счет теплообмена с окружающей кювету средой, которую характеризует безразмерный параметр  $T_0$ , к скорости прямой реакции. Второе слагаемое в правой части уравнения (3.25) описывает изменение температур за счет теплообмена,  $q$  — отношение начальной мощности светового пучка к характерной мощности теплопотерь,  $\delta_i$  ( $i=1 \div 4$ ) характеризуют коэффициенты поглощения оптической энергии реагентами ( $i=1, 2, 3$ ) и буферным газом  $\delta_4$ , если он присутствует. Параметр  $\delta$  равен произведению длины среды на сумму коэффициентов поглощения,  $z$  — продольная координата  $0 \leq z \leq 1$ , нормированная на длину кюветы. Отметим, что введенные безразмерные параметры несколько отличаются от традиционно используемых в [6] при исследовании равновесных процессов, так как они более удобны для проведения численных экспериментов. Важно также подчеркнуть, что в (3.24)—(3.26) учитывается неоднородное поглощение оптического излучения вдоль оси распространения, что приводит к принципиальному изменению происходящих химических и тепловых процессов.

Уравнения (3.24)—(3.26) необходимо дополнить соответствующими граничными и начальными условиями:

$$N_c(z, 0) = N_{c0}, \quad N_A(z, 0) = N_{A0}, \quad N_B(z, 0) = N_{B0},$$

$$T(z, 0) = T_n, \quad I(0, t) = I_0(t).$$

Заметим, что в случае распространения пучка с неоднородным профилем необходимо ввести еще поперечную координату.

Из проведенных численных экспериментов для широкого набора параметров, входящих в уравнения (3.24)—(3.26), следует ряд важных выводов. Так, при выполнении некоторых условий равновесное состояние системы не совпадает со значением максимальной концентрации продукта (обозначим его через  $N_{\max}$ ). Существенно, что из-за различного времени достижения  $N_{\max}$  в разных сечениях среды вдоль нее движется «волна» концентрации продукта (рис. 4), причем с ростом  $z$  увеличивается  $N_{\max}$ . Это связано с тем, что изменение температуры среды может происходить значительно медленнее, чем концентрации  $N_c$ , поэтому помимо равновесного состояния существует еще одно — неустойчивое, которому соответствует максимум  $N_c$ , оно определяется из решения уравнения

$$(N_{A0} - N_c)(N_{B0} - N_c) - kN_c e^{(1-T_c)/T} \cong 0.$$

В качестве иллюстрации на рис. 4 представлены зависимости от времени концентрации продукта реакции, стимулированной прямоугольным световым импульсом, в условиях однородного распределения реагентов  $N_{A0} = N_{B0} = 1$  и для следующих значений параметров:  $N_{c0} = 0$ ;  $k = 0,5$ ;  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_4 = 0$ ;  $\delta_3 = 1$ ;  $q = 6,667$ ;  $T_c = 3$ ;  $T_0 = T_n = 0,333$ ;  $\eta = 0,1$ ;  $\delta = 1$ ; в сечениях  $z = 0$  (сплошная кривая),  $z = 0,3$  (штриховая кривая),

$z=1$  (штрихпунктирная кривая). Заметим, что на начальном этапе реакции с увеличением  $N_c$  растет температура среды из-за поглощения световой энергии. Это в свою очередь приводит к росту теплообмена и затем к уменьшению температуры. Вследствие различия скоростей этих процессов формируется волна концентрации продукта, которая и представлена на рис. 4.

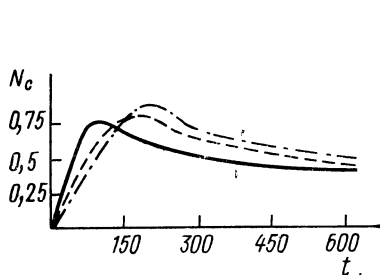


Рис. 4. Зависимости концентрации продукта реакции от времени в различных сечениях среды

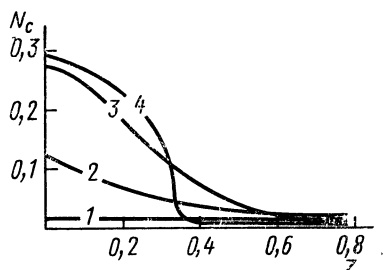


Рис. 5. Концентрация продукта реакции вдоль кюветы в различные моменты времени  $t=50$  (1),  $72,5$  (2),  $100$  (3),  $400$  (4)

Важно подчеркнуть, что в трехкомпонентной системе, так же как и в случае двухкомпонентной среды, возможны бистабильные зависимости параметров реакции от интенсивности оптического излучения ( $S$ -образная зависимость). Однако в данном случае бистабильность по интенсивности имеет место при значительно большем диапазоне параметров. Ее наличие приводит к тому, что в оптически толстой кювете эффективная химическая реакция, стимулированная однородным световым пучком, может происходить в ограниченной по  $z$  области ( $0 \leq z \leq z_k$ ). При  $z > z_k$  выход реакции резко уменьшается — иногда на порядок. При этом перепад значений концентраций определяется параметрами  $\delta$ ,  $I_0$ ,  $q$ . Аналогичным образом ведет себя температура смеси газов. Сказанное выше иллюстрирует рис. 5, на котором представлены зависимости  $N_c$  от  $z$  в различные моменты времени при следующих значениях параметров:  $N_{A0}=N_{B0}=1$ ;  $N_{C0}=0$ ;  $k=1$ ;  $\delta_1=\delta_2=\delta_4=0$ ;  $\delta_3=1$ ;  $q=3,125$ ;  $\eta=2,5$ ;  $T_c=0,375$ ;  $T_0=T_H=0,125$ ;  $\delta=8$ . На рис. 5 видно наличие области эффективного протекания реакции: перепад концентрации составляет 10 раз.

В системе с диффузией данные процессы также имеют место. Однако в этом случае кинетика химической реакции определяется соотношением коэффициентов диффузии веществ. Так, если коэффициент диффузии продукта реакции увеличивается по отношению к коэффициентам диффузии исходных веществ, то локализация химической реакции исчезает. На начальной стадии реакции к боковой стенке распространяется ярко выраженный перепад концентрации, а затем он исчезает. Возможны

колебательные режимы. Важно подчеркнуть, что для широкого интервала изменения входной интенсивности пучка ее выходное значение остается постоянным. Данное обстоятельство можно использовать для стабилизации выходной интенсивности световых импульсов. Имеются также и некоторые другие особенности кинетики химической реакции в условиях развитой диффузии компонент газовой смеси.

Результаты данного пункта частично изложены в [9].

## § 5.

### ПРОСВЕТЛЕНИЕ ОБЛАЧНОЙ СРЕДЫ ОПТИЧЕСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Данной проблеме посвящено достаточно много работ (см., например, [8—12, гл. 1; 39—41; 43; 44; 78; 83; 84; 86; 88; 89, гл. 4]). Это объясняется весьма важным ее значением для практики. В данных работах рассмотрено влияние различных факторов, таких, как размеры капель, движение среды, длина волны излучения, расходимость пучка, амплитудный профиль, начальная ширина, молекулярное поглощение и т. д., на динамику просветления среды. С помощью математического моделирования показано, что интегральное просветление не зависит от начального профиля пучка [88] гл. 4 (при этом среда характеризовалась функцией водности), численно было обнаружено самоотклонение светового пучка в движущейся облачной среде [11] гл. 1 и т. д. Здесь мы остановимся лишь на одной особенности распространения пучка с трубчатым профилем интенсивности. Рассмотрение проведем для щелевых пучков.

В этом случае система безразмерных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial z} + i \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} - i(\alpha T + i\tau_a W)A &= 0, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial x} &= (1 - \beta_T)W|A|^2, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} &= -\gamma_T^2 W|A|^2.\end{aligned}\tag{3.27}$$

На границе по  $x$  и при  $t=0$  изменение температуры и комплексная амплитуда  $A$  равны нулю, а водность  $W=1$ . При  $z=0$  задается начальное распределение амплитуды:

$$A(0, x, t) = 0,5\sqrt{T_u}(x - x_0) \exp\{-2(x - x_0)^m - 10(t - t_0)^2\}/Q,\tag{3.28}$$

$$Q^2 = \int (x - x_0)^{2m} \exp\{-4(x - x_0)^m\} dx \int \exp\{-20(t - t_0)^2\} dt,$$

где  $m=2, 4, 6, 8, 10$ .

Следует отметить, что в [10] изучались нелинейные искажения слабо дифрагирующих световых импульсов в движущейся облачной среде. Была показана возможность аномального увеличения пиковой интенсивности пучка, обусловленного захватом оптически более плотной непросветленной центральной частью среды одного из пиков интенсивности.

Проанализируем самовоздействие светового пучка при следующих значениях параметров:  $0 < z \leq 0,2$ ;  $\beta_T = 0,75$ ;  $\tau_d = 1$ ;  $\gamma = 10$ ;  $0 \leq t \leq T_n = 2,1$ ;  $\alpha = 80, 150$ ;  $t_0 = 1,05$ ;  $x_0 = 4,5$ . Прежде всего рассмотрим распространение оптического излучения при  $\alpha = 80$ . Так, в сечении  $z = 0,05$  в центре трубчатого пучка  $m = 2$  начинает формироваться третий максимум. Однако его интенсивность примерно в 3,2 раза меньше интенсивности боковых максимумов. Профили прозрачности ( $1 - W$ ) и температуры имеют один провал в центре. В конце импульса интегральное смещение профиля водности его минимума составляет 0,75 безразмерных единиц.

Для пучка с  $m = 4$  имеют место аналогичные зависимости, но глубина просветления в 1,36 раза меньше, чем в предыдущем случае. При дальнейшем увеличении  $m$  (например,  $m = 6$ ) картина распространения пучка существенно изменяется. В начале импульса в профиле водности формируется центральный минимум, но глубина прозрачности в нем в 2,5 раза меньше значений, достигаемых в боковых минимумах. Затем в центре пучка формируется центральный максимум. Важно, что во внутренней области пучка начинают формироваться еще два локальных максимума, появление которых связано с отражением оптического излучения от более просветленных частей среды. Нелинейное самовоздействие оптического излучения проявляется также в возникновении асимметрии в зависимости пиковой интенсивности от времени: задняя часть импульса становится более пологой.

В следующем сечении  $z = 0,1$  для пучка с  $m = 2$  глубина прозрачности уменьшается, профиль водности имеет три максимума и становится шире по сравнению с профилем в сечении  $z = 0,05$ . В профиле пучка во втором минимуме значения интенсивности уменьшаются.

При увеличении  $m$  число максимумов и минимумов в профилях пучка и водности растет и достигает 5 для  $m = 6$ . Интересно отметить, что значение интенсивности между центральными пиками практически обращается в нуль. В результате распада пучка на субпучки увеличивается дифракция пучка как целого. В дальнейшем происходит выравнивание значений интенсивности в максимумах и рост интенсивности в боковых максимумах. При этом интенсивность пучка между всеми пиками практически равна нулю. Данная структура субпучков, состоящая в нашем случае из девяти пучков, распространяется, и отдельные субпучки не перекрывают друг друга. Заметим, что наличие не-

линейного поглощения в данном случае принципиально для образования устойчивой структуры субпучков. Расчеты показывают, что при его отсутствии такие структуры также формируются, однако интенсивность между отдельными субпучками не обращается в нуль и существует ярко выраженный максимум.

## § 6.

### ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ОГРАНИЧЕННЫМИ ПУЧКАМИ

Нелинейная теория генерации гармоники ограниченными пучками при больших коэффициентах преобразования, которая рассматривалась в основном в приближении геометрической оптики, справедлива для хорошо коллимированных пучков. Однако при достаточно больших интенсивностях, когда в таких пучках происходит почти 100%-ное преобразование, дифракционные эффекты начинают играть чрезвычайно важную роль. Учет дифракции в теории, описывающей существенно нелинейную стадию процесса ГВГ, может быть выполнен только при численном моделировании и приводит к возникновению ряда новых эффектов. Основными среди них являются взаимофокусировка пучков на квадратичной нелинейности и эффект дифракционного сбоя фаз, приводящий к ограничению коэффициента преобразования (КПД) частоты. С помощью численного моделирования проведено исследование этих двух эффектов с точки зрения определения порогов их возникновения. Вычислены положения нелинейных фокусов и фокальные интенсивности для волны накачки и второй гармоники в широком диапазоне изменения входных параметров основного пучка — мощности, радиуса.

Безразмерные уравнения для амплитуд волны накачки  $A_1$  и второй гармоники  $A_2$  с частотой  $2\omega$  ( $\omega$  — частота волны накачки) в квазиоптическом приближении могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + iD\Delta_{\perp}A_1 = -i\alpha A_2 A_1^* e^{-i\Delta k z}, \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + \frac{iD}{2}\Delta_{\perp}A_2 = -i\alpha A_1^2 e^{i\Delta k z},$$

где  $A_1, A_2$  нормированы на пиковое значение входной амплитуды основного пучка  $E_0$ ,  $z$  — на длину кристалла  $l$ ,  $\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ ,  $\Delta k = \Delta \tilde{k} l = (k_2 - k_1) l$  — безразмерная величина расстройки волновых чисел,  $\alpha$  — параметр нелинейного взаимодействия волн,  $L_{\text{нл}} = 1/\alpha$  — характерная длина, на которой по теории плоских волн большая часть мощности на-

качки преобразуется в мощность гармоник. На передней грани кристалла задаются гауссов пучок накачки и нулевая амплитуда гармоник:

$$A_1(0, r) = e^{-r^2(1-4i/n l_n)}, \quad (3.30)$$

$$A_2(0, r) = 0,$$

где  $l_n$  — центр перетяжки. Исследования проводились при различной фокусировке пучка как на переднюю грань, так и в центр кристалла и на его заднюю грань.

Явление самофокусировки состоит в том, что в среде с квадратичной нелинейностью в условиях сильного энергообмена между волной накачки (ВН) и второй гармоникой (ВГ) появляются фокусы как у ВН, так и у ВГ. Величина интенсивности поля в фокусе, как показывают численные эксперименты, может в несколько сот раз превосходить исходное ее значение. Графики зависимости интенсивности поля в фокусе  $I_f$  и положения фокуса  $z_f$  от безразмерного параметра  $D$  приведены на рис. 6, а—г. Сплошной линией изображены зависимости ВН, пунктирной — ВГ. При численном решении было положено  $l = L_{нл}$  ( $\alpha = 1$ ),  $l_n = 0$ .

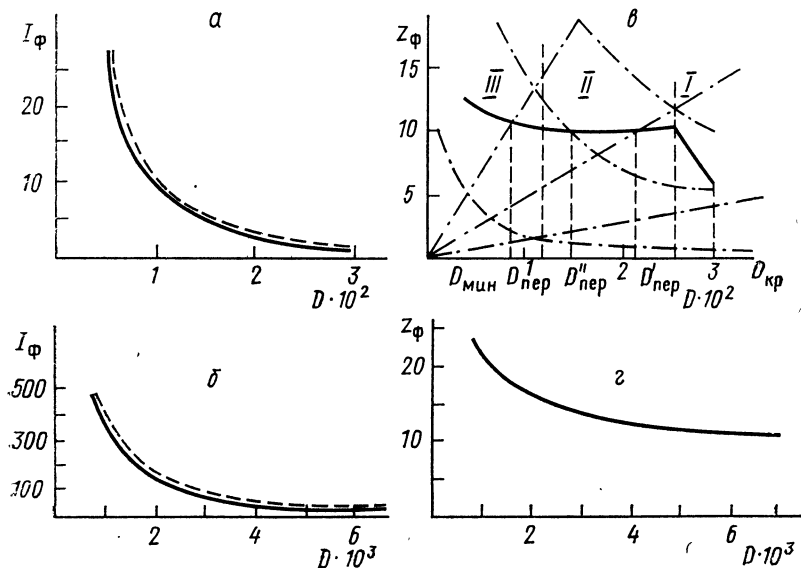


Рис. 6. Зависимости интенсивности поля в фокусе для ВН (сплошная линия) и ВГ (пунктир) от  $D$  (а, б). Зависимости  $z_f$  от  $D$  и перестроенные кривые при изменении фокусировки и мощности накачки (в, г)

На графиках можно выделить три характерные области, в которых поведение решений значительно отличается. В области I существует только один фокус ВГ. Максимальная интенсивность поля в фокусе в этой области равна примерно 2,5. Положение фокуса меняется линейно с изменением  $D$ . Обозначим максимальное значение  $D$ , при котором еще есть фокус, через  $D_{кр}$ . Как видно из графика,  $D_{кр}=3$  [11]. Определение  $D$  дает критические интенсивность и мощность, необходимые для появления эффекта взаимной фокусировки:

$$I_{кр} = \frac{cn_0^2 \lambda^2 z_{кр}^2}{27\pi^5 \chi^2 l^2}, \quad (3.31)$$

$$P_{кр} = \frac{cn_0^3 \lambda^3 z_{кр}}{2^{11}\pi^5 \chi^2 l D_{кр}},$$

здесь  $\lambda$  — длина волны ВН в вакууме,  $z_{кр}$  — величина, при которой появляется первый фокус,  $\chi$  — нелинейная восприимчивость.

В области II существует один фокус ВН и один фокус ВГ; их координаты практически совпадают. Интенсивность поля в фокусе ВН несколько меньше, чем в фокусе ВГ, но превышает исходное значение в несколько раз. Длина, на которой появляются фокусы  $z_{кр}$ , в этой области примерно постоянна,  $z_{ф}=10,6$  и изменяется в пределах 10%. После появления фокусов интенсивность поля на оси немонотонно спадает, и на расстояниях, до которых проводился счет (обычно  $z_{вых}=25$ ), фокусов больше не появлялось.

Для области III характерно наличие многофокусной структуры. На рис. 6 приведены данные только для основного, наиболее сильного фокуса. Перед этим фокусом и за ним появляются другие фокусы, однако интенсивность их меньше. Интенсивность поля в фокусе в области III нарастает с убыванием  $D$  по экспоненциальному закону. При этом, однако,  $z_{ф}$  также быстро увеличивается.

При практическом использовании результатов численных экспериментов необходимо конкретные экспериментальные данные подставить в выражения для  $D$  и  $z_{вых}$ , вычислить их значения и найти тем самым точку (обозначим ее 1) на плоскости  $\{D, z\}$ . Если она окажется над кривой фокусов (рис. 6, в), то в кристалле будет иметь место явление взаимфокусировки, если ниже — то нет. При изменении параметров пучка точка 1 перемещается по плоскости  $\{D, z\}$ , и в соответствии с ее положением в экспериментах могут наблюдаться различные виды взаимфокусировки (более подробно см. [11—13]).

Численные эксперименты показали также, что явление взаимфокусировки возникает и в том случае, если пучок не обладает радиальной симметрией.

Таким образом, учет дифракции в стандартной задаче удвоения частоты приводит к качественно новым эффектам. Как известно, из теории плоских волн следует возможность 100%-ной



перекачки энергии основного излучения во вторую гармонику при точном фазовом синхронизме ( $\Delta k=0$ ) [14]. Однако численные эксперименты, проведенные с  $\Delta k=0$ , показали, что даже при малой длине нелинейного взаимодействия энергообмен между ограниченными пучками приобретает совершенно иной характер. Происходит обратная перекачка энергии второй гармоники в энергию основной волны. Эта перекачка начинается сначала на оси пучка, а затем охватывает все большую приосевую область; КПД удвоителя при этом уменьшается. Причина обратной перекачки энергии связана с дифракционным сбоем фаз (ДСФ) пучков. Численные эксперименты позволили определить оптимальную длину  $z$ , на которой достигается максимальный коэффициент преобразования световой мощности.

Следует отметить, что за счет естественной оптической продольной неоднородности кристаллов возможна при определенном выборе начальной ширины пучка частичная компенсация дифракционного сбоя фаз.

### § 7.

#### ГЕНЕРАЦИЯ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ КОРОТКИМИ ИМПУЛЬСАМИ

Процесс генерации второй гармоники с учетом дисперсии групповых скоростей описывается следующей системой нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} + v \frac{\partial A_1}{\partial \eta} + i D_1 \frac{\partial^2 A_1}{\partial \eta^2} = -i A_2 A_1^*, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} + i D_2 \frac{\partial^2 A_2}{\partial \eta^2} = -i A_1^2.$$

На входе в нелинейную среду задается импульс основной частоты и излучение на удвоенной частоте отсутствует:

$$A_1(0, \eta) = A^{(0)}(\eta), \quad |A^{(0)}(\eta)| \Big|_{\eta \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad (3.33)$$

$$A_2(0, \eta) = 0.$$

Здесь  $z = \bar{z}/L_{нл}$ ,  $\tau_n$  — начальная длительность импульса основной гармоники,  $D_1 = 0,25 L_{нл}/L_{дj}$ ,  $L_{дj} = 0,25 \tau_n^2/|\bar{D}_j|$  — характерная длина распывания волнового пакета,  $\bar{D}_j = -0,5 d^2 k_j / d\omega_j^2$  — коэффициент дисперсионного распывания,  $v = L_{нл}/L_v$ ,  $L_v = \tau_n/|v|$  — длина группового запаздывания,  $\bar{v} = v_2^{-1} - v_1^{-1}$  — расстройка групповых скоростей волн.

Если импульсы испытывают дисперсионное распывание, то на определенной длине возникает дисперсионный сбой фаз, т. е. нарушаются оптимальные условия генерации гармоники. В результате этого развивается обратная перекачка энергии в основ-

ную гармонику и коэффициент преобразования начинает осциллировать. Как показали численные эксперименты, эти осцилляции сопровождаются в зависимости от знаков коэффициентов дисперсионного распывания декомпрессией или самокомпрессией импульсов.

Анализ изменения огибающих волновых пакетов на основной и удвоенной частотах показал, что самокомпрессия импульсов в удвоителях частоты имеет место, когда коэффициенты дисперсионного распывания на обеих частотах одного знака. В численных экспериментах были построены характерные зависимости пиковых интенсивностей основной и второй гармоник от длины кристалла. На основе таких зависимостей были выявлены основные характеристики явления самокомпрессии импульсов, получены зависимости интенсивностей полей в точках максимального сжатия и положений этих точек от параметра  $D_1$ , характеризующего соотношение между нелинейными и дисперсионными эффектами.

Взаимная компрессия импульсов имеет место, когда  $D_1$  оказывается меньше некоторого критического значения, в данном случае ( $D_2/D_1 = 0,5$ )  $D_1^{kp} = 3 \cdot 10^{-3}$ . При уменьшении  $D_1$  интенсивности полей в местах наибольшего сжатия растут, но при этом сами точки сжатия отдаляются. Для основной и второй гармоник они практически совпадают и меняются приблизительно как  $D_1^{-1/3}$ . Для наблюдения эффекта в реальных условиях необходимо, чтобы он успел развиваться в ограниченном по длине нелинейном кристалле. Это означает, что конкретные значения параметров  $D_1$  и  $z_{\max}$  должны быть такими, чтобы соответствующая им точка на плоскости ( $z, D_1$ ) лежала выше кривой, показывающей точки максимального сжатия импульсов в нелинейном кристалле. Если в эксперименте меняется длительность входного импульса при неизменной плотности энергии, то явления самокомпрессии следует ожидать, начиная с длительности, определяемой значением  $D_1$ , когда появляется заметное сжатие импульсов, и кончая длительностью, при которой самокомпрессия происходит на выходной грани кристалла. Этому соответствует точка пересечения кривой  $z_{\max} = D_1^{1/3} l \alpha^{4/3} W_0^{2/3} / \bar{D}_1$ , задающей значения нормированной длины кристалла  $l/L_{nl}$  при разной длительности и, следовательно, разных  $D_1$ , с кривой, определяющей положения точек максимального сжатия. При этом может быть и такая ситуация, когда минимальное расстояние, на котором при данной плотности энергии основной гармоники может наблюдаться самокомпрессия, больше длины кристалла (перестроечная кривая  $z_{\max} = D_1^{1/3} \text{const}$  не пересекает точек сжатия импульсов до точки  $D_1 = D_1^{kp}$ ). В этом случае самокомпрессии наблюдаться не будет. Когда в эксперименте меняется плотность энергии основной гармоники на входе при неизменной длительности, самоком-

прессия будет наблюдаться, начиная с плотности энергии, при которой сжатие импульсов происходит на выходной грани кристалла, если его длина меньше расстояния, на котором эффект наблюдался бы при данной длительности и минимальной плотности энергии. Этому соответствует точка пересечения перестроечной кривой, определяющей положения точек наибольшего сжатия. При увеличении энергии расстояния, на которых наблюдается самокомпрессия, уменьшаются.

Поля в точках максимального сжатия всегда конечны. Простейшие теоремы вложения и интегралы движения дают для них следующие оценки сверху:

$$\max_{\eta} |A_1|^2 \leq 0,25(I_1 + (I_1^2 + 4 \max\{D_1^{-1}, D_2^{-1}\} I_1 + 4I_3)^{1/2})^2, \quad (3.34)$$

$$\max_{\eta} |A_2|^2 \leq (I_1 + (I_1^2 + \max\{D_1^{-1}, D_2^{-1}\} I_1 + I_3)^{1/2})^2.$$

Эффект самокомпрессии в удвоителях частоты может использоваться для укорочения импульсов и для получения одновременно с преобразованием частоты импульсов с другими характеристиками.

Если коэффициенты дисперсионного распывания импульсов на основной и удвоенной частотах имеют разные знаки, то наблюдается декомпрессия импульсов. Средняя длительность волновых пакетов растет, пиковые амплитуды в целом уменьшаются быстрее, чем это было бы за счет дисперсионного распывания. Однако при малых  $|D_j|$  могут наблюдаться всплески интенсивностей волн, но они гораздо ниже, чем в случае  $D_1 D_2 > 0$ , когда имеет место самокомпрессия импульсов.

#### § 8.

#### ТРЕХЧАСТОТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВОЛНОВЫХ ПУЧКОВ В СРЕДАХ С КВАДРАТИЧНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Трехчастотное взаимодействие волн описывается в квазиоптическом приближении следующей системой безразмерных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial z} + iD_1 \Delta_{\perp} A_1 &= -i\alpha_1 A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial z} + iD_2 \Delta_{\perp} A_2 &= -i\alpha_2 A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{\partial A_3}{\partial z} + iD_3 \Delta_{\perp} A_3 &= -i\alpha_3 A_1 A_2 e^{i\Delta k z}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Здесь

$$\alpha_j = 4\pi\sqrt{2\pi}\chi^{(0)}_j/(c\sqrt{cn_1n_2n_3}), \quad (3.36)$$

$$\Delta k = k_3 - k_1 - k_2, \quad \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad D_j = 1/2k_j.$$

Система (3.35) имеет интегралы движения (см. гл. 1), которые остаются постоянными при распространении волн. Это прежде всего соотношения Мэнли — Роу для мощностей.

$$I_{2,3} = P_2/\alpha_2 + P_3/\alpha_3, \quad I_{1,3} = P_1/\alpha_1 + P_3/\alpha_3, \quad I_{1,2} = P_1/\alpha_1 - P_2/\alpha_2. \quad (3.37)$$

В предыдущих параграфах настоящей главы было исследовано явление взаимной фокусировки пучков при генерации второй гармоники, представляющей собой частный случай трехчастотного взаимодействия. Численные эксперименты показали, что это явление возникает при невырожденном трехчастотном взаимодействии в случае, когда  $I_3 > 0$ . При этом появляется один главный фокус, когда интенсивности всех трех волн примерно в одной точке возрастают в несколько раз (и даже на порядок). Такая взаимофокусировка может сопровождаться и многофокусной структурой, когда до основного фокуса и заним возникают другие фокусы с меньшими интенсивностями. При  $z \rightarrow \infty$  происходит распад поля на три невзаимодействующих пучка.

Во всех проведенных численных экспериментах поля в фокусах были конечными. С помощью интегралов  $I_1$  и  $I_3$  можно получить полуэмпирическое неравенство для оценки поля в нелинейном фокусе для аксиально-симметричных пучков:

$$\frac{mI_1^2}{6} M^2 \leq I_3 + MI_1/3, \quad \Delta k = 0, \quad (3.38)$$

где  $M = \sum_{j=1}^3 \max_r |A_j(z, r)|$ ,  $m = \min_j D_j/\alpha_j$ . Здесь предполагалось, что максимумы полей достигаются на оси пучков и что  $\int_0^\infty |A_j|^2 |A_j|/dr^2 r dr \leq 0$ . В проведенных численных экспериментах наблюдались именно такие профили интенсивностей полей.

Поведение волн на больших расстояниях ( $z \rightarrow \infty$ ) с отрицательным интегралом  $I_3$  характеризуется образованием связанных нелинейных волноводов, когда три пучка различной частоты, взаимодействующие между собой когерентным образом на квадратичной нелинейности, распространяются без дифракционной расходимости.

Действительно, если  $I_3 < 0$ , то из (3.37) и  $I_3$  с помощью неравенства Коши — Бунаковского нетрудно получить оценки максимума амплитуд волн снизу:

$$\max_{z, r} |A_1| \geq \frac{|I_3|}{\sqrt{\alpha_2 \alpha_3} I_{2,3}}, \quad (3.39)$$

$$\max_{z, r} |A_2| \geq \frac{|I_3|}{\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} I_{1,3}}, \quad \max_{z, r} |A_3| \geq \frac{|I_3|}{I_1} \quad (\Delta k = 0).$$

Константы, стоящие в правых частях неравенств (3.39), не зависят от  $z$ , так что распад электромагнитного поля на невзаимодействующие пучки становится невозможным. При этом три волны распространяются в виде связанных волноводов, — в общем случае осциллирующих квазиволноводов.

Отметим, что волноводное распространение гауссовых пучков вида

$$A_j(0, r) = V_j \exp \left\{ -\frac{\bar{r}^2}{a_j^2} (1 + \Psi_{0j}) - i\varphi_{0j} \right\}$$

наступает при условии

$$\sum_{j=1}^3 \delta_j V_j^2 < V_1 V_2 V_3 \cos(\Phi_0 - \Phi_\alpha), \quad (3.40)$$

$$\delta_j = \frac{D_j}{a_j a_j^2} (1 + \varphi_{0j}) \left[ \left( \sum_{i=1}^3 a_i^{-2} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi_{0i}}{a_i^2} \right)^2 \right],$$

$$\Phi_\alpha = \arctg \left\{ \sum_{i=1}^3 \frac{\varphi_{0i}}{a_i^2} \middle/ \sum_{i=1}^3 a_i^{-2} \right\},$$

$$\Phi = \varphi_{01} + \varphi_{02} - \varphi_{03}.$$

Отсюда нетрудно получить достаточное условие samozaxvata пучков:

$$(\delta_2 \delta_3)^{1/2} / V_1 + (\delta_1 \delta_3)^{1/2} / V_2 + (\delta_1 \delta_2)^{1/2} / V_3 < \cos(\Phi_0 - \Phi_\alpha).$$

Из последнего выражения видно, что легче захватываются в связанные волноводы коллимированные пучки ( $\varphi_{0j} = 0$ ) с интенсивностями одного порядка при неоптимальном для энергообмена соотношении фаз ( $\Phi_0 = 0$ ). Если изменить соотношение фаз или сделать пучки сильно сходящимися (расходящимися), то они могут не войти в режим samozaxvata.

Структуру неосциллирующих волноводов с действительными амплитудами  $A_j = A_{b,j}(x, y) e^{-i\lambda_j z}$  можно найти, решая краевую задачу на собственные значения для системы уравнений

$$\frac{D_j}{a_j} \Delta_\perp A_{b,j} = \lambda_j / \gamma_j A_{b,j} - A_{b,1} A_{b,2} A_{b,3} / A_{b,j}, \quad (3.41)$$

$$A_{b,j} \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, 3, \quad \lambda_1 + \lambda_2 - \Delta = \lambda_3,$$

которая следует из (3.35) при учете структуры амплитуды  $A_j$  и соответствует вариационной задаче на экстремум функционала:

$$J = I_3 + \lambda_1 I_{1,3} + \lambda_2 I_{2,3}.$$

Из (3.41) видно, что ограниченные в пространстве волны могут существовать, если все  $\lambda_j > 0$ , что соответствует замедлению волн. Для решения (3.41) справедливы следующие соотношения:

$$I_3 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 i_j \gamma_j P_{b,j} = -\int_0^\infty A_{b,1} A_{b,2} A_{b,3} r dr, \quad (3.42)$$

$$P_{b,j} = \int_0^\infty A_{bj}^2 r dr \quad \text{и} \quad -2I_3 = \lambda_1 I_{1,3} + \lambda_2 I_{2,3}.$$

Следовательно,  $I_3 < 0$ , а формула (3.42) позволяет оценить характерные размеры связанных волноводов  $r_{b,j} \sim (\lambda_j/\alpha_j)^{-1/2}$ :

$$r_{b,1} \gtrsim \left( \frac{I_{1,3} \gamma_1}{2|I_3|} \right)^{1/2}, \quad r_{b,2} \gtrsim \left( \frac{I_{2,3} \alpha_2}{2|I_3|} \right)^{1/2},$$

$$r_{b,3} \gtrsim \left[ \frac{\alpha_3 I_{1,3} I_{2,3}}{2|I_3|(I_{1,3} + I_{2,3})} \right]^{1/2}.$$

Таким образом, минимальный радиус пучков всегда больше нуля, и схлопывания произойти не может.

## § 9.

### НЕКОТОРЫЕ ВЫВОДЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

Таким образом, в настоящей главе приведены результаты численного моделирования, иллюстрирующие его возможности. Нетрудно видеть, что численные эксперименты в сочетании, например, с теорией подобия позволяют проанализировать влияние различных факторов на изучаемый процесс, рассчитать его характеристики и указать значения параметров, при которых данный эффект можно наблюдать.

Отметим также, что такие новые нелинейно-оптические явления, как взаимофокусировка пучков, их волноводные и солитонные режимы распространения и т. д. были предсказаны в численных экспериментах и лишь потом было проведено их аналитическое исследование. Следовательно, сочетание численного моделирования и традиционных методов качественного анализа существенно расширяет возможности изучения различных явлений.

## Глава 4

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО И АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

### § 1.

#### ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе излагаются результаты наших исследований, посвященных проблеме компенсации нелинейных искажений световых пучков. В последнее время появилось несколько монографий [1—3], в которых рассматривались различные аспекты данной проблемы, такие, как некоторые принципы работы адаптивных систем (см. также [4; 5]), компенсация искажений на атмосферных трассах, использование ОВФ зеркал в резонаторах и т. д. Большое число важных вопросов рассмотрено в многочисленных публикациях и обзорах [6—12]. Однако в большинстве из них, на наш взгляд, отсутствует систематическое исследование вопросов сходимости и устойчивости алгоритмов, выявление и объяснение характерных особенностей адаптивного управления. Реализующиеся в численных экспериментах, проведенных различными авторами, осциллирующие и расходящиеся режимы отработки оптимальных параметров, как правило, объясняют нелинейностью распространения. Для их устранения предлагается тривиальная операция уменьшения параметров управления, например в два раза. Очевидно, что это не является оптимальным подходом и не позволяет достичь максимального быстрогодействия. Серия работ (см. [13—26] и обзоры [10; 11]), выполненная нами, была посвящена именно алгоритмической части проблемы адаптивного управления: исследованию зависимостей режимов работы, качества компенсации, быстрогодействия системы, устойчивости и сходимости алгоритмов от начальных параметров пучка, от наличия различных ограничений в пространстве управляемых параметров, от расстояния до приемника, его размеров и скорости перемещения. В результате этого удалось сформулировать достаточно общие закономерности компенсации регулярных нелинейных искажений световых пучков и построить алгоритмы с максимальным быстрымдействием, которые просто реализуемы на практике.

Другой проблемой, которой в последнее время уделяется много внимания, является проблема выбора числа степеней свободы адаптивной системы. Очевидно, что с увеличением числа степеней свободы повышается качество компенсации искажений пучка, однако при этом усложняется работа адаптивной системы и снижается ее быстродействие, от которого также зависит качество компенсации. Поэтому на практике желательно ограничиться оптимизацией минимального числа параметров пучка.

В ряде работ [22; 27; 28] на примере конкретных расчетов было продемонстрировано, что при расположении приемника в толще нелинейной среды высокое качество коррекции может быть достигнуто с помощью управления низшими степенями свободы адаптивного зеркала. Более детальный анализ показал, что этот вывод справедлив не всегда: ситуация во многом зависит от соотношения радиусов пучка и приемной апертуры, расстояния до нее, а также от радиуса когерентности (в случае компенсации случайных искажений). Именно эти параметры (а также начальная мощность пучка) определяют число степеней свободы зеркала.

В заключение параграфа подчеркнем, что ниже приводятся результаты, полученные авторами данной книги. Мы специально ограничились лишь ими, преследуя цель показать, какую роль могут сыграть удачно выбранные математические модели адаптивного управления световым пучком. Однако в необходимых случаях будем указывать, что сделано в других работах. Обширную литературу по данной проблеме можно найти в [1—9; 29], где представлены результаты исследований различных авторов. Некоторые нерешенные на данном этапе проблемы сформулированы в [7]. Для знакомства с проблематикой целесообразно также прочитать [4; 5; 1]. Популярно круг задач адаптивной оптики и методы их решения изложены в [30].

## § 2.

### КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА

Мощное оптическое излучение, проходящее через среду с нелинейным показателем преломления, может претерпевать значительные амплитудно-фазовые искажения [31—42]. В оптически прозрачных средах нелинейные искажения связаны с самофокусировкой светового пучка [31—37]. В поглощающей среде при достаточно большой интенсивности пучка может иметь место ее просветление [39—41]: насыщение поглотителя, разрушение центров поглощения и т. д. В дефокусирующей среде самовоздействие оптического излучения приводит к понижению концентрации энергии на мишени. Если она частично отражает оптическое излучение, то в нелинейной среде вблизи нее изменяется распределение поля [38; 42].

Для количественной оценки качества компенсации вводят критерии качества (или функционалы), которые характеризуют распределение электромагнитного поля в сечении расположения приемника (приемной апертуры). Так, концентрацию оптического излучения в общем случае следует оценивать по значению принимаемой мощности:

$$J_p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |A(z, x, y)|^2 \rho(x - x_0 - V_x t, y - y_0 - V_y t, z_0 - V_z t) dx dy, \quad (4.1)$$



где  $x_0, y_0, z_0$  — соответственно начальные координаты центра приемной апертуры и сечения ее расположения,  $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$  — скорость ее перемещения, функция  $\rho$  характеризует оптические свойства приемника: его размер, коэффициенты отражения и поглощения, а также рассеяния. Если приемник имеет малые размеры, то апертурная функция представляет собой  $\delta$ -функцию  $\rho = \delta(x - x_0 - V_x t) \delta(y - y_0 - V_y t)$ . Тогда (4.1) принимает вид

$$J_I = |A(z_0 - V_z t, x_0 - V_x t, y_0 - V_y t)|^2 \quad (4.2)$$

и характеризует интенсивность пучка.

Положение центра тяжести оптического излучения относительно центра приемной апертуры характеризует следующий критерий качества:

$$J_{II} = \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} (x + y)(|A|^2 - \rho) dx dy \right\}^2. \quad (4.3)$$

При численном моделировании целесообразно также качество компенсации оценивать по значениям моментов распределения амплитуды пучка в сечении мишени:

$$J_M = \iint_{-\infty}^{\infty} \sum_{i+j=M} (x^i + y^j) |A|^2 \rho(x - V_x t - x_0, y - y_0 - V_y t, z_0 - V_z t) dx dy. \quad (4.4)$$

Если  $M=2$ , то критерий  $J_M = J_a$  характеризует ширину пучка.

Подчеркнем, что проблема формирования оптимальных условий передачи световой энергии на перемещающийся приемник составляет круг задач динамического управления [26], в который также входят задачи формирования на мишени световых пучков с заданными параметрами, например длительностью  $\tau_n$ , временным профилем  $I(t)$ , заданной геометрией канала повышенной оптической прозрачности в жидкокапельной среде [43], качество формирования которых можно оценивать по значениям следующих функционалов:

$$J_{\tau} = \left\{ \int_0^{\infty} t^2 \iint_{-\infty}^{\infty} |A(z_0, x, y, t)|^2 \rho(x, y, t) dx dy dt / \mathcal{E}_0 - \tau_n \right\}^2 \quad (4.5)$$

— при формировании импульса заданной длительности,

$$J_t = \int \{ \iint |A(z_0, x, y, t)|^2 \rho(x, y, t) dx dy - I(t) \}^2 dt \quad (4.6)$$

— при формировании импульса заданной формы. Здесь  $\mathcal{E}_0$  — безразмерная энергия импульса.

При анализе эффективности просветления облачной среды ее состояния [43] можно характеризовать интегральной функцией просветления вдоль трассы за время импульса. В зависимости от постановки задачи целесообразно вводить критерии, характеризующие отклонения профиля сигнала от его первоначального

чального распределения, или прошедшую через среду мощность сигнала.

Приведенные выше критерии качества в такой записи позволяют проанализировать наиболее важные для практики случаи управления параметрами световых пучков на перемещающийся приемник, а также исследовать особенности адаптации сканируемого оптического излучения. Отметим, что для оценки качества фокусировки сканируемого пучка, прошедшего тонкий нелинейный слой, достаточно использовать только критерий положения центра тяжести пучка, в то время как при распространении в толще нелинейной среды на начальном этапе адаптации желательно ввести функционал, характеризующий отличие угловых скоростей приемника и сканирования.

Существует еще целый класс важных задач, встречающихся в нелинейной оптике. Можно поставить задачу достижения на приемнике требуемой формы  $u(x, y, t)$  светового пучка [49]. В этом случае необходимо минимизировать функционал вида

$$J = \iint (A(z_0, x, y, t) - u(x, y, t))^2 dx dy. \quad (4.7)$$

Большой практический интерес представляет также стимулирование химических процессов, в частности в газах, оптическим излучением. В этом случае задача оптимизации световых пучков состоит в достижении максимальной концентрации  $(z, x, y)$  продукта реакции в заданном объеме среды (либо в некоторых ее частях) при минимальных энергозатратах и длительности импульса. Во многом она аналогична проблеме просветления облачной среды.

В преобразователях частоты оптимальное управление параметрами пучков накачек направлено на максимизацию перекачки их энергии в генерируемую волну:

$$J_p = \iiint |A_r(z_0, x, y, t)|^2 dx dy dt, \quad (4.8)$$

где  $A_r$  — амплитуда генерируемого пучка. В задачах обращения волнового фронта с целью управления характеристиками опорных пучков является достижение наилучшего качества обращения сигнальной волны, которое характеризуется интегралом перекрытия [50]

$$I_H = |\iint A_c A_{об} dx dy|^2 / P_c P_{об}, \quad (4.9)$$

где  $A_c, A_{об}$  — комплексные амплитуды соответственно сигнала и обращенной волны;  $P_c, P_{об}$  — их мощности. Существенно, что максимизация  $I_H$  одновременно должна сопровождаться достижением максимума  $P_{об}$ . Как известно [50], максимумы этих характеристик реализуются при различных оптимальных условиях. Основными причинами, уменьшающими как коэффициент перекачки энергии, так и качество обращения, являются самовоздействие волновых пучков, нарушение оптимального соотношения фаз вследствие дифракции пучков, отличие опорных волн от плоских. Именно влияние этих факторов необходимо умень-

шить. Заметим, что полностью задача оптимизации параметров опорных волн для достижения максимального качества ОВФ в настоящее время не рассмотрена.

Таким образом, круг задач оптимального управления нелинейной адаптивной оптикой включает в себя минимизацию нелинейных искажений световых пучков, достижение максимальной эффективности преобразователей частоты, формирование оптимальных характеристик оптического излучения методами нелинейной оптики [49; 10], в том числе на стадии его генерации. В зависимости от конкретных условий исследуемый процесс может характеризоваться как одним критерием качества, так и несколькими (многокритериальная задача) критериями.

### *§ 3.*

## *АЛГОРИТМЫ И ПАРАМЕТРЫ (ОБЪЕКТ) УПРАВЛЕНИЯ*

### *3.1.*

#### *Алгоритмы управления*

В настоящее время для оптимизации параметров световых пучков предложен ряд алгоритмов управления, среди которых выделим методы теории подобия [49; 51; 52], статистический метод [43; 46; 53] и методы оптимального управления, в частности градиентные методы [54]. Методы теории подобия позволяют существенно повысить эффективность проведения численных экспериментов. Суть их применения заключается в нахождении критериев подобия и построении обобщенных функциональных выражений для исследуемых характеристик излучения, зависящих от безразмерных критериев подобия. Затем проводится численное моделирование явления. Такой подход позволяет рассматривать некоторые задачи оптимального управления параметрами пучка. В зависимости от вида нелинейности либо ограничиваются одним расчетом, либо пространство оптимизируемых параметров заполняют по лучам. Такой метод называется лучевым методом теории подобия [51].

Методы теории подобия наиболее целесообразно использовать, если функционал зависит не более чем от двух оптимизируемых параметров. В противном случае возникает проблема их перебора. Его целесообразно осуществлять, используя статистические методы, в частности Ал<sub>т</sub>-последовательности случайных чисел [55]. С помощью этой последовательности выделенный объем в пространстве оптимизируемых параметров равномерно-случайно заполняется точками зондирования и вычисляются критериальные функционалы. Затем отбираются те из них, в которых вычисленные функционалы удовлетворяют поставленным условиям. Важно подчеркнуть, что увеличение количества зондируемых точек не приводит к необходимости пересчета предыдущих значений. Существенно также, что данный метод позволяет эффективно решать многокритериальные задачи,

не сводя их к однокритериальным. Как методы теории подобия, так и статистические методы позволяют определить глобальный экстремум.

Перечисленные выше методы, как правило, используются при программном управлении, когда оптимизация параметров пучка проводится априори. В адаптивных же системах наибольшее распространение получили градиентные методы. По-видимому, это связано с тем, что они наиболее развиты в задачах определения экстремумов функционалов. Различные варианты этих методов подробно изложены в [54], поэтому здесь на них останавливаться не будем. Ниже рассмотрим лишь характерные особенности их применения в нелинейной оптике.

В общем случае управление параметрами светового пучка  $\Theta = \{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \dots, \Theta_{M_0}\}$  ( $M_0$  — число оптимизируемых параметров, т. е. число степеней свободы) в системах апертурного зондирования осуществляется по закону

$$\mathcal{L}\Theta = -\hat{\gamma}\Phi(J(\Theta, z, \alpha), \Theta, z, \alpha), \quad (4.10)$$

где  $\mathcal{L}$  — оператор, определяемый функцией отклика адаптивной системы,  $\hat{\gamma}$  — матрица управляющих параметров, определяющая как величину очередного шага по оптимизируемым параметрам, так и очередность управления, вектор  $\Phi$  зависит от способа организации адаптации, т. е. от оценки изменения значения функционала. В частности, при использовании градиентных методов  $\Phi_r = \partial J / \partial \Theta$ .

Алгоритм (4.10) соответствует случаю, когда отсутствует запаздывание в поступлении в адаптивную систему информации о приемнике и среде и об изменении значения критерия качества, связанном с изменениями оптимизируемых параметров. Обозначим времена запаздывания соответственно через  $\tau_{зс}$ ,  $\tau_{зп}$  (в [48] время запаздывания обозначалось через  $\tau_{ин}$ ). Существует еще одно характерное время:  $\tau_{ин}$  — время инерционности управления электронных элементов. Его обычно учитывают в операторе (см., например, [13])

$$\mathcal{L} = \tau_{ин} \frac{d^2}{dt^2} + \frac{d}{dt}. \quad (4.11)$$

Заметим, что с помощью  $\tau_{зп}$  также можно описать работу инерционных управляемых элементов (другая математическая модель).

Для наглядности будем различать два предельных случая. Вместо (4.10) получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\Theta(t) = & -\hat{\gamma}(t)\Phi(J(\Theta(t), z(t-\tau_{зс}), \alpha(t-\tau_{зс})), \\ & G(t), z(t-\tau_{зс}), \alpha(t-\tau_{зс})) \end{aligned} \quad (4.12)$$

— в случае наличия запаздывания в поступлении в адаптивную систему информации о приемнике и среде;

$$\mathcal{L}\Theta(t) = -\hat{\gamma}(t)\Phi(J(\Theta(t-\tau_{зп}), z(t), \alpha(t)), \Theta(t-\tau_{зп})z(t), \alpha(t)) \quad (4.13)$$

— при наличии запаздывания в оценке критерия качества. В общем случае вместо (4.12, 4.13) необходимо использовать

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\Theta(t) = & -\hat{\gamma} \Phi(J(\Theta(t - \tau_{\text{зн}}), z(t - \tau_{\text{зс}}), \alpha(t - \tau_{\text{зс}})), \\ & \Theta(t - \tau_{\text{зн}}), z(t - \tau_{\text{зс}}), \alpha(t - \tau_{\text{зс}})).\end{aligned}\quad (4.14)$$

Из (4.12)—(4.14) интуитивно ясно, что при  $\tau_{\text{зс}}=0$  инерция зеркала будет приводить к замедлению процесса достижения оптимальных значений параметров светового пучка и для переменных во времени  $z$  и  $\alpha$  — к уменьшению эффективности оптимизации. Последнюю, вообще говоря, можно повысить, увеличивая быстродействие адаптивной системы. Следовательно, ошибка, допускаемая в оптимизации параметров оптического излучения, может быть устранена. Наличие же запаздывания в получении информации о состоянии среды вносит в оптимальные значения параметров ошибку, никак не устранимую адаптивной системой и ограничивающую эффективность оптимизации. В некотором смысле эта ситуация аналогична ситуации, возникающей при использовании алгоритмов фазового сопряжения, когда время изменения состояния среды, по крайней мере, сравнимо с временем достижения оптимального распределения волнового фронта. Естественно, что это приведет к недокомпенсации фазовых искажений, а также к осцилляциям значения принимаемой мощности.

Подчеркнем, что при численном моделировании наибольшее распространение получили градиентные методы. Однако возможны и другие способы организации управления. В частности, для компенсации нелинейных искажений нами предлагается организовать работу адаптивной системы по алгоритмам (4.12)—(4.14) с

$$\Phi = \frac{\partial J}{\partial \Theta} \left[ \left| \frac{\partial^2 J}{\partial \Theta^2} \right| \right]^{-1},$$

которые основаны на широко применяемом для решения нелинейных уравнений методе Ньютона. Вертикальные линии означают, что берется модуль соответствующих элементов. Эти алгоритмы (или их модификации) обладают рядом преимуществ по сравнению с алгоритмами, базирующимися на градиентных методах.

Следует также сказать, что подавляющее большинство работ посвящено управлению параметрами светового пучка без учета запаздывания и инерции, когда  $\tau_{\text{зс}} = \tau_{\text{зн}} = \tau_{\text{ин}} = 0$ .

На практике часто могут возникать различные ограничения в пространстве управляемых параметров [20], обусловленные техническими возможностями адаптивной системы. В общем случае их можно разделить на два класса: локальные ограничения, когда оптимизируемые параметры не должны превышать некоторых предельных величин:

$$|\Theta_i| \leq Q_i, \quad i = 1 \div M_0, \quad (4.15)$$

где  $Q_i$  — константы, и интегральные, когда должна быть минимизирована некоторая функция (или функционал  $J_\theta$ ) от  $\Theta$ , например

$$J_\theta = (\Theta, \Theta), \quad (4.16)$$

круглые скобки означают скалярное произведение в пространстве управляемых параметров. Ограничения (4.15) учитываются непосредственно при выработке очередного шага управления. Требование же минимальности в процессе управления может быть учтено двумя способами: во-первых, непосредственно вычислением  $J_\theta$  и затем отбором тех параметров, которые реализуют минимум функционала  $J_\theta$ ; во-вторых, посредством сведения двухкритериальной задачи (функционалы  $J_\theta$  и, например,  $J_p$ ) к однокритериальной задаче с функционалом

$$J_\lambda = J + \lambda J_\theta, \quad (4.17)$$

где  $\lambda$  — весовой множитель, характеризующий максимально допустимое интегральное отклонение оптимизируемых параметров от их невозмущенных значений (в общем случае — от заданных значений),  $J$  — один из введенных выше критериев качества.

Важно подчеркнуть, что введение ограничений (4.17) обусловлено не только технической конструкцией адаптивных систем, но и имеет математическое обоснование. В силу немонотонной зависимости критерия качества от оптимизируемых параметров, во-первых, существует несколько наборов  $\Theta_i$ , реализующих одно и то же значение функционала, во-вторых, в процессе оптимизации определяется, вообще говоря, локальный экстремум. Использование функционала (4.17) позволяет устранить неоднозначную зависимость критерия качества от  $\Theta_i$  и ввести вместо  $J$  выпуклый функционал  $J_\lambda$ . Таким образом, имеет место регуляризация по Тихонову исходной задачи. Для численного моделирования параметр  $\lambda$  подбирается экспериментально.

Еще одно замечание относительно операторов  $\mathcal{L}$  и дифференцирования функционалов, входящих в (4.12)—(4.14). В зависимости от конкретных условий алгоритм управления может быть либо непрерывным, либо дискретным. В первом случае  $\mathcal{L}$  представляет собой дифференциальный оператор, в простейшем случае равный

$$\mathcal{L}\Theta = \frac{d\Theta}{dt}. \quad (4.18)$$

Если временной интервал между соседними значениями управляемых параметров достаточно большой, то дифференциальный оператор необходимо заменить на разностный. Например, вместо (4.18) получим

$$\mathcal{L}_n\Theta = \Theta_{n+1} - \Theta_n. \quad (4.19)$$

Если трудно получить информацию о производной функционала, то ее заменяют разностным соотношением. Тогда алгоритм управления в системе без запаздывания примет вид [56]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n \Theta &= \Theta_{n+1} - \Theta_n + (1 - \sigma)(\Theta_n - \Theta_{n-1}) = \\ &= -\hat{\gamma} \frac{J(\Theta_n) - J(\Theta_{n-1})}{\Theta_n - \Theta_{n-1}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

В (4.20) разностная производная функционала символически записана в виде дроби,  $\sigma \geq 0$  — параметр (возможно, матрица), меньший или равный 1, природа которого может быть связана, например, с инерцией зеркала либо обусловлена организацией процесса управления. В последнем случае величина  $\sigma$  (либо элементы матрицы  $\sigma$ ) выбирается из условий устойчивости и быстродействия, от которых зависит качество компенсации при динамическом управлении из-за изменения характеристик среды или приемника (например, его положения). Отметим, что  $\sigma$  характеризует влияние скорости изменения оптимизируемых параметров на предыдущей итерации на скорость их изменения на данной итерации и по существу определяет демпфирование поступающего в адаптивную систему сигнала. Так, если сигнал отсутствует ( $\gamma = 0$ ), то система вернется к своему устойчивому состоянию. Таким образом,  $\sigma$  оказывает регуляризирующее воздействие.

Адаптивное управление может быть также организовано по иному принципу, чем это обсуждалось до сих пор. В частности, для оптимизации волнового фронта  $S$  пучка известен алгоритм фазового сопряжения, в котором очередное распределение волнового фронта  $S_{n+1}$  связано с волновым фронтом отраженного от приемника пучка соотношением  $S_n^{(\text{отр})}$

$$S_{n+1} = -S_n^{(\text{отр})}. \quad (4.21)$$

Сходимость данного алгоритма зависит от многих параметров и, в частности, от нелинейности процесса распространения. В численных экспериментах, как правило, реализовывались осциллирующие режимы адаптации. На наш взгляд [56], целесообразно (4.21) изменить и проводить оптимизацию по закону [56]

$$S_{n+1} = -\gamma_\phi S_n^{(\text{отр})}, \quad (4.22)$$

где параметр  $\gamma_\phi$  выбирается из условия устойчивости. Алгоритм (4.22) носит название модифицированного алгоритма фазового сопряжения. Детальный анализ алгоритма (4.22) предстоит еще выполнить.

В заключение данного пункта следует подчеркнуть, что здесь мы не остановились на алгоритмах, организованных на основе анализа характеристик опорного пучка, а также на алгоритмах, использующих прогнозирование состояния турбулентной среды (эти вопросы отражены в [3]), и внутрирезонаторных задачах [57], интерферометрах (информацию об этом и ссылки на работы можно найти в [1]).

### 3.2. Параметры управления

В зависимости от физической постановки задачи параметрами управления могут быть различные характеристики оптического излучения. Так, в преобразователях частоты [58; 59; 49] обычно оптимизируют фокусировку пучков, начальную расстройку волновых чисел, мощность накачек и их радиус, длительность импульсов, а также профиль пучка. Этими же параметрами целесообразно управлять для реализации оптимальных условий обращения волнового фронта. В задачах же транспортировки световой энергии проводят оптимизацию волнового фронта пучка. Это связано, по-видимому, с более простой по сравнению с оптимизацией других параметров технической реализацией управления волновым фронтом. Однако в последние годы появился ряд работ (см., например, [60—63]), в которых реализовано управление пространственным профилем и временной формой световых пучков.

В задачах просветления облачной среды помимо оптимизации параметров мощного импульса необходимо выбрать соответствующую задержку сигнального импульса относительно мощного, так, чтобы достигнуть минимального затухания и искажения формы и профиля сигнала. При этом следует различать два случая: 1) длительность импульса сигнала значительно меньше длительности зондирующего импульса ( $\delta$ -импульс сигнала); 2) их длительности сравнимы между собой. Во втором случае кроме перечисленных параметров целесообразно оптимизировать временную форму сигнала.

В подавляющем же большинстве работ исследуются различные вопросы управления волновым фронтом  $S$ . При этом либо оптимизируют непосредственно функцию  $S$  (многомерное управление без ограничений на число степеней свободы), либо представляют  $S$  в виде суммы по базисным функциям:

$$S_y(x, y, t) = \sum_{p, q=1} \Theta_{pq}(t) \Phi_{pq}(x, y), \quad (4.23)$$

где  $\Theta_{pq}$  — оптимизируемые параметры, функции  $\Phi_{pq}$  определяются геометрией распространения и называются модами зеркала. Индекс «у» подчеркивает, что  $S_y$  — управляемая функция. В идеальных корректорах, исследуемых аналитически и в численных экспериментах, в качестве базисных функций выбираются в аксиально-симметричном случае полиномы Лагерра  $(L_p)$  [64] или обобщенные полиномы Лагерра  $(L_p^{(2)})$  [65]:

$$\Phi_{pq}(r) = \begin{cases} L_p(2r^2), & f_r = l^{-r^2}, \\ L_p^{(2)}(2r^2), & f_r = \sqrt{2} r^2 l^{-r^2}, \end{cases} \quad (4.24)$$

соответственно для пучков с гауссовым и трубчатым начальными профилями. При отсутствии аксиальной симметрии функции



$\Phi_{pq}$  удобно выбрать в виде полиномов Эрмита [64]  $(H_p(\sqrt{2}x) \times H_q(\sqrt{2}y))$  или полиномов Цернике [66]. В частности, для гауссова пучка получим

$$\Phi_{pq}(x, y) = H_p(\sqrt{2}x) H_q(\sqrt{2}y). \quad (4.25)$$

Заметим, что выбор тех или иных функций определяется также видом производящей функции и условием ортогональности полиномов. Для теоретического анализа удобно, чтобы базисные функции были ортогональны.

Часто для выявления вклада в эффективность компенсации амплитудно-фазовых искажений различных aberrаций в качестве базисных функций выбирают функции вида

$$\Phi_{pq} = \Phi_p = r^p, \quad p \geq 2, \quad (4.26)$$

в случае аксиальной симметрии и

$$\Phi_{pq} = \sum_{p+q=M} x^p y^q, \quad M \geq 1, \quad (4.27)$$

в общем случае. Данные функции могут быть выражены через линейные комбинации классических полиномов. Иногда при анализе искажений профилированных пучков (например, гипергауссовых и гипертрубчатых) вместо (4.26) в качестве мод гибкого зеркала следует выбрать функции в виде [23]

$$\Phi_{pq} = \Phi_p = r^{mp}, \quad p \geq 2, \quad \Phi_1 = r^2, \quad (4.28)$$

где  $m$  — показатель экспоненты в начальном профиле пучка. В реальных же системах [4; 5; 67] требуемый профиль гибкого зеркала создается за счет приложения возмущений в отдельных точках зеркала. В общем случае для определения поверхности зеркала необходимо решать уравнение, описывающее поверхность зеркала под действием внешнего воздействия [68], т. е. определить функцию отклика зеркала. Однако для многих из них функции отклика могут быть аппроксимированы простыми функциями, например гауссовой с различной степенью показателя экспоненты [67] или колоколообразной [5] и др. В этом случае базисные функции  $\Phi_{pq}$  — функции отклика гибкого зеркала. Запишем их:

$$\Phi_{pq} = \exp \left\{ - \left| \frac{x - x_p}{a_0} \right|^{m_3} - \left| \frac{y - y_q}{a_0} \right|^{m_3} \right\} \quad (4.29)$$

— для функции отклика гауссова типа,

$$\Phi_{pq} = \text{ch}^{-2} \left( \frac{x - x_p}{a_0}, \frac{y - y_q}{a_0} \right) \quad (4.30)$$

— для зеркала с колоколообразной функцией отклика. Здесь  $x_p, y_q$  — координаты возмущений (приводов),  $m_3$  — параметр,  $a_0$  — отношение радиуса действия отдельного привода к радиусу пучка.

Основная задача моделирования таких зеркал состоит в определении оптимального расположения приводов и их количества. При этом существует несколько подходов к решению данной проблемы. В ряде работ, в том числе экспериментальных, предлагается располагать приводы таким образом, чтобы часть из них фокусировали пучок, другие отрабатывали аберрации: например, один набор — кому, другой — астигматизм и т. д.

Данный подход оправдан, если вклад этих аберраций уменьшается при увеличении индекса  $(p, q)$  в (4.24)—(4.27). В нелинейной же среде для мощных пучков может оказаться более целесообразным, если один и тот же привод будет участвовать в формировании одновременно нескольких типов аберраций. Это, в частности, приведет к существенному сокращению числа степеней свободы.

Работа гибких зеркал различается также по способу организации управления. Так, в процессе адаптации возможно как непосредственное управление отдельными приводами зеркала, так и «выставление» их под определенное каким-либо образом очередное распределение волнового фронта, например с помощью минимизации функционала

$$J_s = \iint \{S(x, y) - S_y(x, y)\}^2 \kappa(x, y) dx dy, \quad (4.31)$$

где функция  $\kappa$  характеризует передающую апертуру. Эти два процесса будут различаться по быстродействию и, следовательно, выбором констант управления  $\gamma$ .

Существует также другой тип зеркал, в которых требуемое распределение волнового фронта создается за счет отражения светового пучка от поверхности, образуемой за счет перемещения и поворота отдельных частей зеркала [4] — сегментов. Такие зеркала применяются для световых пучков с большим начальным радиусом ( $\sim 1$  м и более). После отражения светового пучка от сегментированного зеркала он приобретает следующее амплитудное распределение:

$$\bar{f}(x, y) = f(x, y) \sum_{p+q=1}^{M_c} R_{pq}(x, y), \quad (4.32)$$

а его волновой фронт для малых углов поворота представим в виде

$$S_y(x, y, t) = \sum_{p+q=1}^{M_c} (\varphi_{xp}(t)(x - x_p) + \varphi_{yq}(t)(y - y_q) + S_{opq}(t)) R_{pq}. \quad (4.33)$$

Здесь  $R_{pq}$  — коэффициент отражения отдельного сегмента,  $M_c$  — число сегментов,  $\varphi_{xp}$ ,  $\varphi_{yq}$  — соответственно углы поворота сегмента по осям  $x$ ,  $y$ ;  $S_{opq}$  — продольное смещение сегмента. Как и в случае гибких зеркал, рассчитать оптимальные значения наклонов и сдвигов можно двумя способами: либо при не-

посредственном управлении сегментами, либо в расчете (например, градиентным методом) оптимального волнового фронта  $S$ . Затем следует выставить сегменты так, чтобы реализовать минимум функционала  $J_s$  (4.31).

#### § 4.

#### МОДЕЛИ АДАПТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Как видно из вышеизложенного, для очередного значения вектора управляющих параметров необходима информация о градиенте функционала (или о функционале). При численном моделировании градиент функционала можно вычислить с помощью решения сопряженной задачи [69], для вывода уравнения которой используют тождество Лагранжа. В случае компенсации самовоздействия световых пучков сопряженное уравнение, записанное относительно комплексной функции  $\Psi$ , имеет вид

$$-\frac{\partial \Psi^*}{\partial z} + i\Delta_{\perp}\Psi^* + iz\varepsilon_{\text{нл}}^*\Psi^* = 0. \quad (4.34)$$

Граничные условия для  $\Psi$  определяются критерием качества и задаются в плоскости расположения приемника

$$\Psi|_{z_0+V_z t} = A(z_0+V_z t, x, y, t)\rho(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0-V_x t, y-y_0-V_y t) \quad (4.35)$$

при работе адаптивной системы по критерию принимаемой мощности,

$$\Psi|_{z_0+V_z t} = A(z_0+V_z t, x, y, t)\rho(x-x_0-V_x t, y-y_0-V_y t) \sum_{i+j=M} x^i y^j \quad (4.36)$$

при работе по критерию  $J_M$  и т. д. В этом случае значение производной функционала  $J$  выражается через  $\Psi^*(0, x, y, t)$  следующим образом:

$$\frac{\partial J}{\partial S} = -2/M \{ \Psi_{|z=0}^* e^{iS(x, y, t)} \} f(x, y) I^{1/2}(t) \quad (4.37)$$

— при оптимизации волнового фронта,

$$\frac{\partial J}{\partial \Theta_{pq}} = 2 \iint f(x, y) I^{1/2}(t) I M \{ \Psi_{|z=0}^* e^{iS} \} \Phi_{pq} dx dy \quad (4.38)$$

— при оптимизации коэффициентов  $\Theta_{pq}$  в (4.23). Явный вид  $\varepsilon_{\text{нл}}$  и  $\varepsilon_{\text{нл}}^*$  определяется механизмом нелинейности. Так, при распространении оптического излучения в среде с керровской нелинейностью имеем

$$\varepsilon_{\text{нл}} = |A|^2, \quad \varepsilon_{\text{нл}}^* = \Psi(A^*)^2 - 2|A|^2 \Psi^*, \quad (4.39)$$

в случае компенсации стационарной тепловой дефокусировки

$$\epsilon_{\text{нл}} = T, \quad \Delta_{\perp} T = -|A|^2, \quad (4.40)$$

$$\epsilon_{\text{нл}}^* = T\Psi^* + 2A^*\xi, \quad \Delta_{\perp}\xi = -IM\{\Psi A^*\},$$

при наличии бокового движения среды или при распространении импульса

$$\epsilon_{\text{нл}} = T, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \right\} T = |A|^2, \quad (4.41)$$

$$\epsilon_{\text{нл}}^* = 2A^*\xi - T\Psi^*, \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \right\} \xi = -IM\{\Psi A^*\}. \quad (4.42)$$

Аналогичным образом с помощью тождества Лагранжа записывается система сопряженных уравнений в случае генерации оптических гармоник, стимулирования химических процессов излучением, просветления облачной среды. Подчеркнем еще раз, что введение сопряженной системы уравнений обусловлено тем, что управление и критерий качества заданы в разных сечениях среды [69]. Отметим, что так как отраженный пучок, как правило, имеет малую интенсивность, то в ряде работ не учитываются наведенные им оптические неоднородности (слагаемые  $A^*\xi$  в (4.40) опускаются).

Введение сопряженной системы уравнений значительно усложняет численное моделирование: необходимо решать в два раза большее число нелинейных уравнений, причем граничные условия для них заданы на противоположных концах отрезка по оси  $z$ . Поэтому желательно разработать более простые математические модели, сохраняющие основные черты исходной задачи, на основе которых можно было бы дать рекомендации, в частности по повышению эффективности проведения численных экспериментов и для достижения максимального быстродействия адаптивного управления. Суть упрощения состоит в построении аналитической зависимости критерия качества от оптимизируемых параметров. После этого полученные зависимости следует подставить в исходные алгоритмы управления и проанализировать их. В результате этого получим явные зависимости сходимости, устойчивости и быстродействия алгоритмов от параметров пучка (его мощности, начального радиуса, фокусировки и т. д.) и среды, расстояния до приемника, его характеристик и констант управления. Один из возможных подходов к разработке упрощенных моделей предложен в [13; 14; 70]. Он основан на безаберрационном описании распространения световых пучков. В этом случае на приемнике можно вычислить ширину пучка, его пиковую интенсивность и другие характеристики пучка. Однако этот подход не позволяет проанализировать вклад компенсации аберраций в эффективность управления. В общем случае наиболее полную информацию можно получить лишь на основе численного моделирования. Для пучков же с достаточно

большим начальным радиусом, таким, что расстояние до приемника много меньше дифракционной длины  $l_d$ , весьма эффективным оказывается приближение тонкого нелинейного слоя. В этом приближении считается, что нелинейная среда вносит лишь фазовые искажения. Поэтому дифракцией пучка в толще нелинейной среды можно пренебречь. После прохождения этого слоя оптическое излучение распространяется в линейной среде. Иногда такой подход применяется и для расчета искажений, вносимых протяженной нелинейной средой, в качестве начального приближения волнового фронта. При этом в материальное уравнение подставляют амплитуду пучка, определенную из решения уравнения для линейной задачи. Начальное приближение можно также считать при использовании нелинейной геометрической оптики.

Особый интерес представляет вопрос о вычислении критерия качества. На практике существует целый класс задач, когда информацию о значении критерия качества на приемнике непосредственно получить невозможно. Поэтому важно вводить функционалы, которые можно измерить в сечении передающей апертуры. В линейной турбулентной среде такой характеристикой является функционал [1]

$$J_n = \iint A \Psi dx dy, \quad (4.43)$$

$\Psi$  — отраженный от мишени пучок, который был записан также в [71; 72]. Отметим, что в теории ОВФ аналогичный  $J_n$  функционал (см. (4.9)) носит название интеграла перекрытия [50]. Аналогичный инвариант имеет место в случае теплового самовоздействия встречных волн. Кратко покажем это.

Взаимодействие встречных волн при тепловом механизме нелинейности описывается системой уравнений

$$\frac{\partial A}{\partial z} + i\Delta_{\perp} A + i\alpha T A = 0, \quad (4.44)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial z} + i\Delta_{\perp} \Psi + i\alpha \Psi A = 0, \quad L_T T = |A|^2 + |\Psi|^2,$$

$L_T$  — линейный оператор, вид которого зависит от условий распространения. Умножив первое и второе уравнения системы (4.44) соответственно на  $\Psi$  и  $A$  ( $\Psi$  — отраженный пучок; встречная волна), проинтегрировав по поперечным координатам (а если задача нестационарная, то по времени тоже), а затем вычтя из первого второе уравнение, получим

$$\frac{\partial}{\partial z} \iint A \Psi dx dy = 0. \quad (4.45)$$

Следовательно, инвариант  $J_n$  имеет место при тепловом самовоздействии. Инвариант (4.45) позволяет связать распределение амплитуды светового пучка на приемнике, расположенном в

нелинейной среде, через характеристики падающего на мишень и отраженного от нее пучков в сечении  $z=0$ , и разработать более точные учитывающие абберации модели адаптивного управления. Кроме этого инвариант (4.45) служит для оценки правильности численного моделирования встречного взаимодействия световых пучков. Существуют также и другие инварианты, например

$$\iint AA^* dx dy = \text{const.} \quad (4.46)$$

## § 5.

### ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ АВТОФОКУСИРОВКИ ПУЧКОВ

На режимы работы адаптивных систем оказывает влияние целый ряд факторов, в частности выбор констант управления, критерия качества, характеристики пучка и приемника. Проведенное в различных работах численное моделирование адаптивных систем (как правило, на основе градиентного метода) выявило неустойчивость итерационного процесса отработки оптимального распределения волнового фронта. Природа неустойчивости связывалась с немонотонной зависимостью критерия качества от значений оптимизируемых параметров, и для ее устранения предлагалось уменьшать (например, в два раза) значение константы управления. Детальный анализ, проведенный на основе безабберационного приближения (см. [13—26; 43—48] и другие работы), показал, что неустойчивость присуща всем адаптивным системам, даже при фокусировке светового пучка в линейной среде. Такой подход позволил получить аналитические зависимости, связывающие константы управления, расстояние до приемника, мощность пучка, размер приемника, скорость его перемещения и т. д., которые определяют режим работы адаптивной системы. Численное моделирование на основе квазиоптического описания распространения световых пучков полностью подтвердило сделанные на основе разработанных моделей выводы. Важно, что в результате исследований удалось построить алгоритмы с максимальным быстродействием, что чрезвычайно важно для практики. В рамках настоящей книги мы не можем изложить все полученные результаты, поэтому здесь остановимся лишь на характерных особенностях алгоритмов адаптивного управления, указав по конкретным вопросам ссылки на работы.

## 5.1.

### Керровская нелинейность

Используя безабберационное описание распространения светового пучка, можно вычислить его безразмерную ширину:

$$a^2(L) = (1 - L\Theta)^2 + L^2(1 + \alpha_{\text{нл}}). \quad (4.47)$$

Напомним, здесь  $\Theta$  — фокусировка пучка,  $\alpha_{нл}$  — превышение начальной мощности пучка над критической (этот коэффициент отличается в 4 раза от коэффициента нелинейности в уравнении квазиоптики),  $L$  — измеряемое в единицах  $ka^2/2$  расстояние до приемника. В этом случае нетрудно вычислить критерии качества и получить следующие из (4.10) правила достижения оптимальной фокусировки [14]:

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + 2\gamma L(1 - L\Theta_n) \quad (4.48)$$

— при работе адаптивной системы по критерию  $J_a$ ,

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + 2\gamma L \frac{(1 - L\Theta_n)}{[(1 - L\Theta_n)^2 + L^2(1 + \alpha_{нл})]^2} \quad (4.49)$$

— при настройке системы по критерию пиковой интенсивности. Существенным отличием этих законов друг от друга является наличие в знаменателе выражения (4.49) слагаемого, зависящего от  $\Theta_n$ . Если  $(1 + \alpha_{нл})^2 L^2 \ll 1$  и начальное условие работы адаптивной системы соответствует плоскому фазовому фронту ( $\Theta = 0$ ), то по мере оптимизации фокусировки ее значение приближается к  $1/L$  и знаменатель становится много меньше 1. Наличие малого параметра в знаменателе правой части (4.49) приводит к появлению специфических черт в процессе достижения оптимальной фокусировки по этому критерию.

Подчеркнем еще раз, что характерной чертой алгоритмов (4.48) и (4.49) является их универсальность. Это означает, что при использовании других критериев качества соответствующие алгоритмы управления будут записываться в виде, аналогичном либо (4.48), либо (4.49). Из (4.48), (4.49) следует, что оптимальные условия фокусировки оптического излучения (в смысле минимума  $J_a$ , максимума  $J_I$ ) реализуются при  $\Theta_{опт} = 1/L$ . Сходимость итерационных процессов, во-первых, определяется выбранным функционалом, во-вторых, зависит от параметров  $\gamma$ ,  $L$ ,  $\alpha_{нл}$ .

Более простым является управление по критерию  $J_a$ . Из (4.48) и (4.49) следует, что пошаговое изменение  $\Theta_n$  и ширины пучка на приемнике  $a_n(L)$  происходит следующим образом:

$$\Theta_n = \Theta_{опт} + (\Theta_{нач} - \Theta_{опт})(1 - 2\gamma L^2)^{n-1}, \quad (4.50)$$

$$a_n^2(L) = L^2(\Theta_{нач} - \Theta_{опт})^2(1 - 2\gamma L^2)^{n-1} + L^2(1 + \alpha_{нл}),$$

$$n = 0, 1, \dots,$$

где  $\Theta_{нач}$  — начальное значение фокусировки пучка (фокусировка на нулевой итерации).

Нетрудно видеть, что при  $2\gamma L^2 < 1$  адаптивная система монотонно обрабатывает оптимальную фокусировку пучка ( $\Theta_n > \Theta_{опт}$  или  $\Theta_n \leq \Theta_{опт}$ ). Если параметр  $\gamma$  увеличить так, чтобы  $1 < 2\gamma L^2 < 2$ , то процесс фокусировки будет осциллирую-

щим, но сходящимся:  $\Theta_n \rightarrow 1/L$  при  $n \rightarrow \infty$ . При дальнейшем увеличении константы управления  $\gamma L^2 > 1$  процесс автофокусировки будет расходящимся:  $\Theta_n \rightarrow \infty$  и  $a^2(L) \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ . Таким образом, для сходимости и устойчивости итерационного процесса (4.48) достаточно выполнения условия

$$|1 - 2\gamma L^2| < 1. \quad (4.51)$$

Интересно отметить, что при  $\gamma = 1/2L^2$  реализуется максимальное быстроедействие адаптивной системы: оптимальная фокусировка достигается за две итерации. Эта характерная особенность была положена в основу разработки зависимостей  $\gamma$  от  $n$  для достижения максимального быстроедействия.

Работа адаптивной системы по критерию  $J_I$  носит более сложный характер, что непосредственно затрудняет решение уравнения (4.49). Однако, используя метод Лемерея [72], можно проанализировать автофокусировку графически. Для этого на плоскости  $\{\Theta_n, \Theta_{n+1}\}$  строят график зависимостей  $\Theta_{n+1}$  от  $\Theta_n$  и проводят биссектрису угла первого квадранта, а затем графически строят последовательность.

Используя метод Лемерея, можно проанализировать процесс фокусировки оптического излучения по критерию  $J_I$ . Если справедливо неравенство  $(1 - L\Theta_n)^2 < L^2(1 + \alpha_{нл})$ , реализуемое вблизи оптимального значения фокусировки, ее изменение осуществляется аналогично (4.50):

$$\Theta_n = \Theta_{\text{опт}} + (\Theta_{\text{нач}} - \Theta_{\text{опт}}) \left( 1 - \frac{2\gamma}{L^2(1 + \alpha_{нл})^2} \right)^{n-1}, \quad (4.52)$$

При  $\gamma < L^2(1 + \alpha_{нл})^2/2$  идет монотонный процесс фокусировки светового пучка:  $\Theta_{\text{нач}} \leq \Theta_n \leq \Theta_{\text{опт}}$ . Осцилляции положения фокуса возникают, когда  $\gamma \lesssim L^2(1 + \alpha_{нл})^2$ . Итерационный процесс не будет сходиться, если  $\gamma > L^2(1 + \alpha_{нл})^2$  и, следовательно, положение фокуса будет неустойчивым. Резюмируя вышесказанное, получим следующее условие устойчивости:

$$\left| 1 - \frac{2\gamma}{L^2(1 + \alpha_{нл})^2} \right| < 1. \quad (4.53)$$

Характерной особенностью работы адаптивной системы по критерию  $J_I$  является отсутствие чисто расходящегося итерационного процесса: все  $\Theta_n$  ограничены некоторой константой, не зависящей от номера итерации. Возможно также, что значение фокусировки изменяется случайным образом от итерации к итерации. В этом случае реализуется стохастический процесс (необходимо, чтобы  $\gamma/L^2(1 + \alpha_{нл})^2 \gg 1$ ). Весьма важным является наличие двух устойчивых состояний адаптивной системы (бистабильности), если  $\gamma L^2 = 1$  (критерий  $J_a$ ) или  $\gamma/L^2(1 + \alpha_{нл})^2 = 1$  (критерий  $J_I$ ), а также периодических режимов при настройке системы по критерию  $J_I$ .



Выше нигде не упоминали о наличии нелинейности. Нетрудно видеть, что все полученные результаты справедливы также для линейной среды. В результате достижения оптимальной фокусировки устанавливается максимальное значение интенсивности:

$$J_1 = I_{\max} = \frac{1}{L^2(1 + \alpha_{\text{нл}})}, \quad (4.54)$$

а относительный выигрыш в оптимизации по сравнению со случаем плоского волнового фронта равен

$$\eta = 1 + \frac{1}{L^2(1 + \alpha_{\text{нл}})}. \quad (4.55)$$

Из (4.54) (4.55) следует, во-первых, оптимальная коррекция волнового фронта эффективна в ограниченном диапазоне расстояний до приемника  $L \leq (1 + \alpha_{\text{нл}})^{-1}$ , во-вторых, с увеличением мощности пучка эта область сокращается.

Существенно, что чем меньше  $L$ , тем медленнее (при неизменном  $\gamma$ ) система обрабатывает оптимальную фокусировку. Поэтому в процессе управления  $\gamma$  желательно изменять при переходе с одного приемника на другой.

При использовании критерия принимаемой мощности в апертуре радиуса  $R_a$  процесс адаптации будет происходить так же, как (4.48) и (4.49), где вместо  $\gamma$  нужно подставить следующие выражения соответственно в (4.48) и (4.49):

$$\gamma \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2R_a^4}{a_n^2(L)(1 - \exp(-2R_a^2/a_n^2(L)))^2} \right\}, \quad (4.56)$$

$$\frac{\gamma R_a^2}{2} \exp(-R_a^2/a_n^2(L)).$$

Для предельного перехода к критерию пиковой интенсивности в (4.56) необходимо выполнение условия  $\gamma R_a = \text{const}$ . Для ускорения процесса фокусировки целесообразно вместо критерия  $J_p$  использовать в численных экспериментах функционал средней мощности  $J_p/R_a^2$ . Интересно отметить, что значения параметра  $\gamma$ , для которых адаптивная система устойчива и эффективно работает по критерию  $J_a$ , ограничены как сверху, так и снизу, в то время как для критерия  $J_p$  для устойчивости итерационного процесса достаточно, чтобы  $\gamma$  не превышало некоторой константы.

В случае непрерывного управления отработка оптимальной фокусировки для достижения минимальной ширины пучка в сечении  $L$  нелинейной среды происходит по экспоненциальному закону:

$$\Theta(t) = \Theta_{\text{опт}} + (\Theta_{\text{нач}} - \Theta_{\text{опт}})e^{-t/\tau_a}, \quad (4.57)$$

где  $\tau_a = 1/2\gamma L^2$  — постоянная времени установления  $\Theta_{\text{опт}}$ . В случае же настройки адаптивной системы по критерию пиковой интенсивности существуют два этапа отработки  $\Theta_{\text{опт}}$ : полиномиальный с постоянной времени  $\tau_a$  и экспоненциальный с постоянной времени  $\tau_I = (1 + \alpha_{\text{нл}})^2 L^2 / 2\gamma$ . Таким образом, здесь в отличие от критерия  $J_a$  постоянная времени  $\tau_I$  увеличивается с ростом нелинейности и расстояния до приемника.

Выше предполагалось, что адаптивное зеркало мгновенно отрабатывает команду. Однако реальные зеркала обладают инерцией, которую можно характеризовать постоянной времени  $\tau_{\text{ин}}$ , и в ряде случаев ее необходимо учитывать. Тогда отработка фокусировки описывается следующей системой уравнений [13] (см. (4.11)):

$$\tau_{\text{ин}} \frac{d\Theta}{dt} + \Theta = B, \quad \frac{dB}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \Theta}. \quad (4.58)$$

Анализ решения уравнений (4.58) при настройке по минимуму ширины показывает, что возможно возникновение колебательного режима  $\tau_a < 4\tau_{\text{ин}}$ . Если  $\tau_a = 4\tau_{\text{ин}}$ , то время установления оптимальной фокусировки увеличивается в два раза ( $\tau_a = 2\tau_{\text{ин}}$ ), а для случая  $4\tau_{\text{ин}} < \tau_a$  наличие инерции зеркала сказывается на начальном этапе его работы. При настройке системы по пиковой интенсивности инерция зеркала оказывает влияние не только на быстрдействие, но и на значение оптимальной фокусировки, если  $4\tau_{\text{ин}} < \tau_a$ . Однако если начальное значение выбрано таким образом, что  $(1 - L\Theta)^2 \ll L^2(1 + \alpha_{\text{нл}})^2$ , то режим работы определяет соотношение  $4\tau_{\text{ин}}/\tau_I$ , и они аналогичны режимам адаптивной системы при ее настройке по критерию  $J_a$ .

Аналогичные результаты справедливы при прохождении оптическим излучением тонкого нелинейного слоя, толщиной  $l_0$ . В этом случае необходимо скомпенсировать также дополнительную расходимость  $\Theta_{\text{нл}}$ , и на мишени максимальная интенсивность достигается при

$$\Theta_{\text{опт}} = 1/L + \Theta_{\text{нл}}. \quad (4.59)$$

При распространении светового импульса возникает необходимость динамической компенсации его дефокусировки, которая происходит по закону

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + 2\gamma L(1 - L(\Theta_n - \Theta_{\text{нл}}(n))). \quad (4.60)$$

Решение (4.60) имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta_n = & \Theta_{\text{опт}} + (\Theta_{\text{нач}} - \Theta_{\text{опт}})(1 - 2\gamma L^2)^{n-1} + \\ & + 2\gamma L^2 \sum_{p=0}^{n-1} \Theta_{\text{нл}}(p)(1 - 2\gamma L^2)^{n-1-p}, \end{aligned} \quad (4.61)$$

из которого следует, что для устойчивой работы системы достаточно выполнения условия (4.51) и произведение  $\max_n |\Theta_{\text{нл}}(n)| \gamma n$

было конечным. Это означает, что изменение нелинейной расходимости от итерации к итерации должно быть порядка  $1/n$ . Если значение константы управления таково, что  $(1-2\gamma L^2) \rightarrow 1$ , то имеет место квазистатическое управление фокусировкой:

$$\Theta_n = 1/L + \Theta_{нл}(n-1). \quad (4.62)$$

Следовательно, при дискретном алгоритме управления качество компенсации динамической расходимости определяется быстродействием системы.

При расположении приемника внутри нелинейной среды для расчета оптимальных параметров светового пучка необходимо обратиться к численному эксперименту. Однако, используя безабберационное приближение, получим следующий закон отработки фокусировки:

$$\begin{aligned} \Theta_n = 1/L + (\Theta_{нач} - 1/L) \prod_{p=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{2\gamma}{L^2(1 + \alpha_{нл}(p))^2} \right) + \\ + \sum_{p=0}^{n-1} \Theta_{нл}(p) \prod_{q=p+1}^{n-1} \left( 1 - \frac{2\gamma}{L^2(1 + \alpha_{нл}(q))^2} \right), \end{aligned} \quad (4.63)$$

согласно которому для повышения быстродействия необходимо к концу импульса увеличивать значение  $\gamma$  пропорционально квадрату мощности пучка, а для устойчивой работы достаточно выполнения условия  $|1-2\gamma L^2| < 1$ . Следует подчеркнуть, что вблизи оптимальной фокусировки работа адаптивной системы по критерию пиковой интенсивности и по критерию ширины пучка происходит по одному закону.

В случае статического управления фокусировкой светового пучка максимальная плотность энергии на расстоянии  $L$ , равная

$$w(0, L) = w(0, 0) \operatorname{arctg} \xi / (L^2 \xi), \quad \xi = \Theta_{нл}(\tau_n/2), \quad (4.64)$$

достигается при фокусировке  $\Theta_{ст} = 1/L + \Theta_{нл}(\tau_n)/2$ , где  $\tau_n$  — длительность импульса. Следовательно, начальная часть импульса фокусируется более сильно, при  $t = \tau_n/2$  фокусировка пучка совпадает с ее оптимальным значением, а в конце импульса — фокусируется более слабо. Поэтому необходимо использовать динамическое управление.

## 5.2.

### *Тепловая нелинейность*

Аналогичные результаты справедливы при компенсации тепловой дефокусировки оптического излучения. В отличие от компенсации керровского самовоздействия при тепловой дефокусировке оптического излучения нелинейность среды

из-за ее нелокального отклика будет меньше влиять на режимы работы адаптивной системы. Так, например, результаты по компенсации расходимости, вносимой тонким слоем, нелинейной среды, полностью переносятся на случай теплового самовоздействия. Однако величина расходимости  $\Theta_{\text{нл}}$ , естественно, отличается от  $\Theta_{\text{нл}}$  для керровского слоя. Подчеркнем здесь только, что из-за конечного быстрогодействия системы оптимальная фокусировка реализуется с некоторой ошибкой  $\Theta = 1/L + \Theta_{\text{нл}}(t) - \tau_a \frac{d\Theta}{dt}$ . В результате этого степе-  
 нь концентрации энергии на мишени уменьшается в  $1 + [\Theta_{\text{нл}}(\tau_n)\tau_a/\tau_n]^2$  раз. Отсюда видно, что хорошая компенсация будет, если за время  $\tau_a$  нелинейная расходимость изменяется незначительно.

Используя безабберационное описание распространения оптического излучения, можно также проанализировать характерные особенности компенсации бокового смещения светового пучка, прошедшего тонкий слой движущейся нелинейной среды. Не уменьшая общности, будем считать, что среда движется в плоскости  $(x-z)$ . Тогда нетрудно вычислить критерии  $J_p$ ,  $J_a$ ,  $J_\psi$ ,  $J_I$  как функции начальной фокусировки и наклона волнового фронта  $\Theta^{(x)}$  (в функции  $S_y$  наклону волнового фронта соответствует слагаемое  $S_y = \Theta^{(x)}x$ ). При этом отработка  $\Theta^{(x)}$  при дискретном алгоритме управления, использующем градиентный метод, осуществляется по закону

$$\xi_{n+1} = \xi_n - 2\gamma L^2 \begin{cases} \xi_n, & J_\psi \\ \xi_n/a^3(L) \exp(-L^2\xi_n^2/a^2), & J_I \\ \exp(-(R_a^2 + L^2\xi_n^2)/a^2(L)) \operatorname{sh}\left(\frac{2R_n L \xi_n}{a^2(L)}\right), & J_p. \end{cases} \quad (4.65)$$

Здесь  $\xi_n = \Theta_n^{(x)} - \Theta_\alpha$ ,  $\Theta_\alpha$  — дополнительный наклон волнового фронта пучка на выходе из слоя среды.

Работа адаптивной системы при ее настройке по критерию  $J_\psi$  аналогична автофокусировке пучка при работе системы по минимуму его ширины. Следует подчеркнуть, что, в отличие от настройки по критериям  $J_p$ ,  $J_I$ , при работе адаптивной системы по положению центра тяжести  $J_\psi$  пучка отработка  $\Theta^{(x)}$  не зависит от  $\Theta$ . Поэтому управление  $\Theta^{(x)}$  и  $\Theta$  в данном случае осуществляется независимо друг от друга.

Отработка  $\Theta^{(x)}$  при настройке системы по другим критериям качества осуществляется более сложным образом. Однако вблизи его оптимального значения изменение  $\Theta^{(x)}$  происходит по закону

$$\Theta_n^{(x)} = \Theta_\alpha + (\Theta_{\text{нач}}^{(x)} - \Theta_\alpha) \left( 1 - \frac{2\gamma L^2}{a^3(L)} \begin{cases} 1, & J_\psi \\ R_a e^{-R_a^2/a^2(L)}, & J_p \end{cases} \right)^{n-1}, \quad (4.66)$$

$\Theta_{\text{нач}}^{(x)}$  — начальное значение  $\Theta^{(x)}$ . Из сравнения (4.65) и (4.66) ясно, что при постоянном  $\gamma$ , удовлетворяющем условию сходимости итерационных процессов (4.66), существенно замедляется быстрое действие адаптивной системы. Поэтому для его повышения необходимо начальное значение константы управления выбирать из условия

$$\frac{2\gamma L^2}{a^2(L)} \exp\{-L^2(\Theta_\alpha - \Theta_{\text{нач}}^{(x)})^2/a^2(L)\} < 1, J_1, \quad (4.67)$$

$$\frac{\gamma L^2}{a(L)} \exp\{-(R_a^2 + L^2(\Theta_\alpha - \Theta_{\text{нач}}^{(x)})^2)/a^2(L)\} < 1, J_p,$$

а затем экспоненциально увеличивать по закону  $\exp\{(L(\Theta_\alpha - \Theta^{(x)}))^2/a^2(L)\}$ . В результате оптимизации  $\Theta^{(x)}$  интенсивность на оси пучка увеличивается по сравнению со значением  $\Theta^{(x)}=0$  в следующее число раз:  $\eta = \exp\{L^2\Theta_\alpha^2/a^2(L)\}$ . Очевидно, в ряде случаев компенсация смещения центра тяжести пучка будет давать наибольший вклад в увеличение значения функционала.

При одновременной оптимизации фокусировки и наклона волнового фронта пучка управление ими целесообразно осуществлять с разными коэффициентами  $\gamma$ . Например, при настройке по пиковой интенсивности в случае использования одного значения констант управления по обоим каналам отработка  $\Theta^{(x)}$  будет происходить значительно медленнее фокусировки пучка. Поэтому сначала следует проводить оптимизацию  $\Theta^{(x)}$ , а затем, уменьшив значение  $\gamma$ , оптимизировать фокусировку. В случае установления осциллирующего (или расходящегося) режима отработки оптимальных параметров необходимо сначала уменьшать коэффициент  $\gamma$  в канале управления фокусировкой, а потом, если сходимость не достигнута, в канале для  $\Theta^{(x)}$ . Для

иллюстрации на рис. 7 представлены зависимости оптимизируемых параметров  $\Theta^{(x)}$  (пунктирная и штрихпунктирная кривые) и  $\Theta$  (сплошная кривая) от номера итерации для  $\gamma=4$  в случае отработки сначала наклона волнового фронта (пунктирная кривая), а затем фокусировки. Штрихпунктирная кривая соответствует случаю, когда сначала оптимизируется фокусировка, а затем  $\Theta^{(x)}$ .

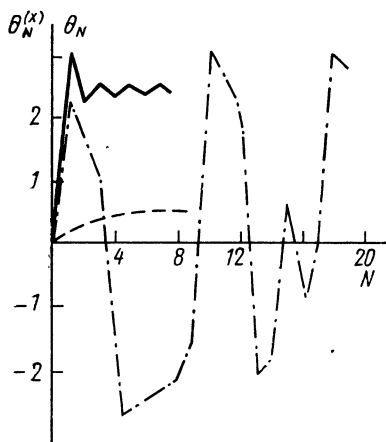


Рис. 7. Зависимость оптимизируемых параметров фокусировки пучка и наклона волнового фронта от номера итерации и порядка оптимизации параметров

В заключение отметим, что в [18] рассмотрен случай компенсации бокового смещения пучка, прошедшего слой движущейся с переменной скоростью среды, а более детально изложенные здесь результаты можно найти в [15; 73].

Для полноты анализа необходимо рассмотреть влияние времени  $\tau_{нл}$  установления нелинейного отклика на адаптивную фокусировку пучка [24; 25]. Так, если  $\tau_{нл} \ll \tau_a$ , то справедливы вышеизложенные результаты и адаптивная система не «чувствует» динамику установления отклика среды. Ее учет приводит к поправкам в решении соответствующих уравнений, описывающих процесс автофокусировки, порядка  $(\tau_{нл}/\tau_a)^2$ . Для обратного неравенства ( $\tau_a \ll \tau_{нл}$ ), имеющего место в случае компенсации нелинейной расходимости квазистационарного теплового самовоздействия в неподвижной среде (или движущейся среде в случае  $\tau_a \ll \tau_v$ ), изменение фокусировки при настройке адаптивной системы по критерию минимальной ширины пучка происходит следующим образом:

$$\Theta = 1/L + \sum_{p=0}^{\infty} (\tau_a/\tau_{нл})^p \left( C_p - \frac{\partial C_p}{\partial t} \right), \quad (4.68)$$

$$C_0 = \Theta_{нл}, \quad C_p = \int_0^t C_{p-1}(\eta) d\eta, \quad p > 1,$$

из которого в первом приближении следует

$$\Theta = 1/L + \Theta_{нл} + \frac{\tau_a}{\tau_{нл}} \int_0^t \Theta_{нл}(\eta) d\eta - \frac{\partial \Theta_{нл}}{\partial t} \left( 1 - \frac{\tau_a}{\tau_{нл}} \right). \quad (4.69)$$

Таким образом, релаксация нелинейности приводит к двум важным изменениям в процессе работы адаптивной системы. Во-первых, изменяется оптимальное значение нелинейной расходимости: к динамическому управлению добавляется усредненное значение нелинейной расходимости. Во-вторых, уменьшается ошибка динамического управления. Первое из двух перечисленных изменений ухудшает качество отслеживания нелинейной расходимости, второе улучшает его. Следовательно, существует оптимальное значение  $\tau_a$ , при котором достигается максимальное качество коррекции нелинейной расходимости [25]. Влияние соотношения различных времен ( $\tau_n$ ,  $\tau_a$ ,  $\tau_l$ ,  $\tau_{нл}$  и т. д.) на качество компенсации как для непрерывного, так и дискретного алгоритма управления рассмотрено в [24; 25]. Отметим здесь, что при дискретном алгоритме управления, как правило, реализуются расходящиеся режимы адаптации. Поэтому целесообразно использовать либо регуляризующие методы, либо квазипериодические режимы работы адаптивной системы.

### 5.3.

#### *Адаптивная фокусировка при наличии ограничений на профиль гибкого зеркала [20]*

Постановка задачи оптимизации параметров светового пучка при наличии ограничений в пространстве управляемых параметров сформулирована в § 3 настоящей главы (см. (4.15) — (4.17)). Характерные особенности работы адаптивных зеркал с дополнительными условиями на их форму при различных условиях на трассе распространения пучка рассматривались в [15; 16; 18; 20; 23]. Здесь приведем некоторые закономерности, учитывая, что предыдущие результаты справедливы и в данном случае.

**Керровская нелинейность.** Отработка оптимальной фокусировки  $\Theta_{\text{опт}} = 1/L(1 + \lambda/L^2)$  в случае непрерывного алгоритма управления при настройке по минимуму ширины пучка на приемнике происходит по экспоненциальному закону с постоянной времени  $\tau_{\text{ал}} = 1/2\gamma(\lambda + L^2)$ . Таким образом, ограничение на отклонение формы зеркала от заданного профиля (например, плоского профиля) приводит, во-первых, к изменению оптимального значения фокусировки, во-вторых, к увеличению быстродействия системы. При этом ширина пучка на мишени увеличивается по сравнению с шириной, достигаемой при фокусировке зеркалом без ограничений, в следующее число раз:

$$\eta = 1 + (\lambda/L^2)/[L^2(1 + \alpha_{\text{нл}})(1 + \lambda/L^2)^2]. \quad (4.70)$$

В случае инерциального зеркала режим его работы зависит от соотношения  $4\tau_{\text{ин}}(1 + \lambda/L^2)/\tau_{\text{а}}$ . При  $4\tau_{\text{ин}}/\tau_{\text{а}} \leq 1/(1 + \lambda/L^2)$  адаптивное зеркало обрабатывает оптимальную фокусировку по экспоненциальному закону, для обратного неравенства имеет место колебательный режим установления оптимума. Следовательно, дополнительное условие данного типа приводит к более жестким требованиям на возможную инерцию зеркала.

При дискретном алгоритме управления наличие ограничения на отклонения формы зеркала от плоского профиля приводит, с одной стороны, к уменьшению допустимого значения константы управления, при котором имеет место устойчивая работа системы, с другой стороны, также к увеличению быстродействия адаптивной системы. Из численных экспериментов [20] следует, что для  $\lambda \leq 0,01$  доля принимаемой мощности практически не изменяется, а число итераций, необходимых для достижения оптимального распределения волнового фронта и значение функционала  $J_s$  уменьшается соответственно в 2 и 3,5 раза по сравнению со значениями, достигаемыми без ограничений.

**Тепловая дефокусировка.** Минимальная ширина пучка, прошедшего слой нелинейной среды, на приемнике достигается при фокусировке  $\Theta_{\text{опт}} = (1/L + \Theta_{\text{нл}})/(1 + \lambda/L^2)$ . В случае распространения светового импульса адаптивная система обрабатывает оптимальную фокусировку по закону

$$\Theta_n = 1/L(1 + \lambda/L^2) + (\Theta_{\text{нач}} - \Theta_{\text{опт}})(1 - 2\gamma(L^2 + \lambda))^{n-1} + \\ + 2\gamma L^2 \sum_{p=1}^{n-1} \Theta_{\text{нл}}(p)(1 - 2\gamma(L^2 + \lambda))^{n-1-p}. \quad (4.71)$$

При достаточно малом значении  $1 - 2\gamma(L^2 + \lambda)$  имеет место квазистатическое управление:

$$\Theta_n = \frac{1}{L(1 + \lambda/L^2)} + \frac{\Theta_{\text{нл}}(n-1)}{1 + \lambda/L^2}. \quad (4.72)$$

Следовательно, с ростом  $\lambda$  уменьшается влияние  $\Theta_{\text{нл}}(n)$  на формирование оптимальной фокусировки, что приводит к снижению эффективности динамической компенсации.

В случае компенсации смещения центра тяжести пучка наличие условия минимального отклонения профиля зеркала от положения равновесия приводит к тому, что центр пучка будет расположен от оси первоначального распространения на расстоянии  $X(L) = L/(1 + L^2/\lambda)$ . При этом максимальная интенсивность на его оси уменьшится в

$$\eta = \exp\{(L\Theta_a\lambda/L^2)^2/(a(L)(1 + \lambda/L^2))^2\}$$

раз по сравнению со случаем  $\lambda = 0$ .

При работе адаптивной системы по критерию  $J_I$  или  $J_p$  данное условие также приводит к более жестким требованиям на константу управления и изменению оптимального значения наклона волнового фронта, которое определяется соответственно из уравнений

$$\frac{L^2}{a^2(L)} \exp\{-L^2(\Theta_{\text{опт}}^{(x)} - \Theta_a)^2/a^2(L)\}(\Theta_{\text{опт}}^{(x)} - \Theta_a) = -2\lambda\Theta_{\text{опт}}^{(x)}, \quad (4.73)$$

$$\frac{L}{a(L)} \operatorname{sh}\left\{\frac{2R_a L(\Theta_{\text{опт}}^{(x)} - \Theta_a)}{a^2(L)}\right\} \exp\left\{-\frac{R_a^2 + L^2(\Theta_a - \Theta_{\text{опт}}^{(x)})^2}{a^2(L)}\right\} = -\lambda\Theta_{\text{опт}}^{(x)}.$$

Из (4.73) в первом приближении следует

$$\Theta_{\text{опт}}^{(x)} = \Theta_a - \lambda\Theta_a/(\lambda + L^2 a^2(L)), \quad (4.74)$$

$$\Theta_{\text{опт}}^{(x)} = \Theta_a \left/ \left[ 1 + \lambda_a^3(L) e^{R_a^2/a^2(L)} \frac{1}{L^2 R_a^2} \right] \right.$$

В заключение обсуждения влияний ограничений на качество фокусировки пучка отметим, что характерной особенностью работы адаптивной системы с ограничением (4.15) является немонотонная зависимость необходимого числа итераций от значения параметра  $Q_i$ . При этом доля принимаемой мощности пучка практически не изменяется, если  $Q_i > 1,7$ .



## 5.4.

Управление фокусировкой сканируемых пучков  
[16; 17; 23; 25, 26]

Для практики наибольший интерес представляет фокусировка световых пучков на перемещающийся приемник. В этой ситуации расстояние до него становится функцией времени (номера итерации) и изменяется как из-за продольного, так и из-за поперечного смещения приемника. Этим вызвана необходимость сканирования пучка.

Отметим, что основные закономерности отработки оптимальных условий фокусировки пучка остаются прежними. Однако перемещение мишени предъявляет новые требования к выбору констант управления. В качестве иллюстрации рассмотрим некоторые примеры. Так, фокусировка светового пучка на приемник, расположенный в толще кубичной среды, происходит по правилу

$$\Theta_n = 1/L_n + (\Theta_{\text{нач}} - 1/L_0) \prod_{p=0}^{n-1} (1 - 2\gamma L_p^2) + \sum_{p=0}^{n-1} (1/L_p - 1/L_{p+1}) \prod_{k=p+1}^{n-1} (1 - 2\gamma L_k^2), \quad (4.75)$$

если для оценки качества компенсации используется функционал ширины пучка. Следовательно, качество коррекции оптического импульса определяется скоростью перемещения приемника и быстродействием системы. Если  $\gamma$  постоянна в процессе адаптации, то для устойчивой работы достаточно выполнения условия  $\max_n |1 - 2\gamma L_n^2| < 1$ , а также произведение  $n \max_n |(1/L_n - 1/L_{n+1})| |1 - 2\gamma L_n^2|$  должно быть ограничено.

Таким образом, даже если выполнено первое условие, а второе — нет, то качество фокусировки пучка будет низким. Поэтому в процессе оптимизации параметр  $\gamma$  желательно изменять по закону  $1/L_n^2$ . Если значение константы управления таково, что  $2\gamma L_n^2 \rightarrow 1$ , то имеет место квазистатическое управление:

$$\Theta_{\text{кв.ст}} = 1/L_n + (1/L_{n-1} - 1/L_n)/2\gamma L_n^2,$$

согласно которому оптимальная фокусировка определяется расстоянием до мишени и скоростью ее перемещения. Поэтому в случае приближающегося приемника ( $L_n - L_{n-1}$ ) фокус светового пучка будет расположен за ним, а при его удалении адаптивная система фокусирует световой пучок до сечения, в котором он находится. В результате этого ухудшается качество управления, а ширина пучка на приемнике увеличивается по сравнению со случаем  $\Theta_{\text{опт}} = 1/L_n$  в следующее число раз:

$$\eta_{\Delta} = 1 + (L_n - L_{n-1})/[L_n^2(1 + \alpha_{\text{пл}})2\gamma L_n^2].$$

При коррекции поперечного смещения приемника в результате обработки оптимального наклона волнового фронта  $\Theta_{\text{опт}}^{(x)} = \Theta_n^{(n)}$  ( $\Theta_n^{(n)}$  — угловое положение приемника) интенсивность в кубичной среде увеличивается по сравнению со значением, достигаемым при  $\Theta^{(x)} = 0$ , в  $\eta = \exp \{(\Theta_n^{(n)})^2 / (1 + \alpha_{\text{нл}} + (1/L_n - \Theta_n^{(n)})^2)\}$  раз. Таким образом, нелинейность среды приводит к уменьшению эффективности оптимизации наклона и фокусировки волнового фронта в  $\exp \{(\Theta_n^{(n)})^2 / (1 + \alpha_{\text{нл}})\}$  раз.

Из анализа квазистатического управления

$$\Theta_{\text{кв. ст}}^{(x)} = \Theta_n^{(n)} + (\Theta_{n-1}^{(n)} - \Theta_n^{(n)}) / 2\gamma L_n^2$$

следует, что для удаляющегося от оси  $z$  ( $\Theta_n^{(n)} > \Theta_{n-1}^{(n)}$ ) приемника центр пучка будет расположен перед ним, а для обратного случая — за ним, что приводит к уменьшению качества отслеживания положения мишени. В случае динамической фокусировки светового импульса положение фокуса зависит от соотношения  $1/L_n - 1/L_{n+1}$ ,  $\Theta_{\text{нл}}(n) - \Theta_{\text{нл}}(n+1)$ . При распространении коротких импульсов, для которых тепловая линза не успевает рассеяться за время  $\tau_{\text{и}}$ ,  $\Theta_{\text{нл}}(n+1) > \Theta_{\text{нл}}(n)$ . Поэтому для удаляющегося приемника фокус оптического излучения всегда расположен за ним. При приближении мишени фокус пучка может быть расположен как перед, так и за ней, в зависимости от соотношения изменения нелинейной расходимости и положения приемника.

В случае релаксации нелинейного отклика положение фокуса зависит также от соотношения длительности импульса и времени установления отклика. В начале импульса, когда  $\Theta_{\text{нл}}(n)$  возрастает, положение фокуса определяется написанными выше соотношениями. Для «хвостовой» части импульса, когда  $\Theta_{\text{нл}}(n+1) < \Theta_{\text{нл}}(n)$ , получим, что для приближающейся мишени фокус пучка может быть расположен перед ней.

При боковом перемещении приемника обработка наклона волнового фронта происходит по одному из следующих законов:

$$(V + l_0(\Theta_{n+1}^{(x)} - \Theta_n^{(x)}))\ddot{\Theta}_{\alpha n} = \Theta_{\alpha}, \quad (4.76)$$

$$\Theta_{n+1}^{(x)} = \Theta_n^{(x)} - 2\gamma L_n^2 \begin{cases} \xi_n, & J_{\text{ц}}, \\ (L_n a_n(L_n))^{-1} \text{sh} \frac{2R_a L_n \xi_n}{a_n^2(L_n)} e^{-\frac{R_a^2 + X_n^2}{a_n^2(L_n)}}, & J_p, \\ \xi_n \exp \left\{ -\frac{X_n^2}{a_n^2(L_n)} \right\} \bigg/ a_n^3(L_n), & J_I \end{cases}$$

где  $X_n = L_n(\tilde{\Theta}_{an} - \Theta_n^{(x)})$ . Из (4.76) следует, что самовоздействие оптического излучения существенно усложняет работу адаптивной системы по сравнению с работой известных систем автоматического регулирования. Учитывая, что в случае полного отслеживания положения приемника в линейной среде  $\Theta^{(x)} = \Theta_n^{(n)}$  для решения (4.76), естественно воспользоваться разложением

$$\Theta^{(x)} = \Theta_n^{(n)} + \sum_{p=1}^{\infty} \Theta_p^{(x,p)}, \quad \tilde{\Theta}_{an} = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{\Theta}_{an}^{(p)}, \quad (4.77)$$

$$\Theta_{нач}^{(x,p)} = \begin{cases} \Theta_{нач}^{(x)}, & p = 1, \\ 0, & p > 1. \end{cases}$$

Подставляя (4.77) в (4.76) и решая соответствующие разностные уравнения, получим, что для устойчивой работы кроме вышенаписанных условий необходимо, чтобы изменения положения приемника и скорости движения среды были порядка  $1/n$ . Если  $\Theta_{n-1}^{(n)} < \Theta_n^{(n)}$ , то центр тяжести пучка располагается ближе к оси  $z$ , а при уменьшении значения  $\Theta_n^{(n)}$  на двух последовательных итерациях — дальше от оси  $z$ . При ускорении движения приемника качество его отслеживания несколько повышается, а при замедлении — ухудшается. В результате неполной коррекции интенсивность на приемнике уменьшается по сравнению с оптимальными условиями фокусировки в

$$\gamma_{\Delta} = \exp \left\{ L_n^2 \left( \Theta_{n+1}^{(n)} - \Theta_n^{(n)} + \Theta_{\alpha} \left( \frac{1}{\tilde{V}_{n+1}} - \frac{1}{\tilde{V}_n} \right) \right)^2 \right\}$$

раз. Здесь  $\tilde{V}_n = V + l_0(\Theta_{n+1}^{(n)} - \Theta_n^{(n)})$ .

Таким образом, быстродействие адаптивной системы наряду с нелинейностью определяет качество концентрации световой энергии на мишени. Поэтому в процессе управления необходимо изменять  $\gamma$  по закону

$$\gamma_n = \frac{\gamma_0}{(L_n R_n)^2} [(1 - L_n \Theta_n)^2 + L_n^2 (1 + \alpha_{нл})^2], \quad (4.78)$$

а при управлении фокусировкой светового импульса

$$\gamma_n = \frac{\gamma_0}{(L_n R_n)^2} \left[ (1 - L_n \Theta_n)^2 + L_n^2 \left( 1 + \alpha_{нл} \int_0^t I(\eta) d\eta \right)^2 \right], \quad (4.79)$$

где  $\gamma_0$  — начальное значение константы управления. Численные эксперименты показали высокую эффективность использования (4.78), (4.79): как правило, оптимальное распределение волно-

вого фронта достигалось за две-три итерации с относительной точностью  $10^{-4}$ . В случае же управления наклоном волнового фронта для компенсации бокового смещения целесообразно константу управления изменять по закону

$$\gamma_{n+1}^{(x)} = \frac{\gamma_0 a_n^3}{2L_n^2} \exp \{ -(L_n(\Theta_n^{(x)} - \Theta_x)/a_n(L))^2 \}. \quad (4.80)$$

При этом реализуется максимальное быстродействие системы. Существенно, что оптимальные законы (4.78) — (4.80) и другие для различных критериев качества можно получить, используя теорию итерационных методов (метод минимальных невязок, метод поправок и метод скорейшего спуска).

При практической реализации (4.78) — (4.80) необходима информация о состоянии среды и приемника, что далеко не всегда возможно получить. Однако существует эффективный способ их реализации. Нетрудно видеть, что управление по правилу

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \frac{\hat{\gamma}}{J^2 L_n^2} \frac{\partial J}{\partial \Theta_n} \quad (4.81)$$

эквивалентно управлению параметрами пучка по обычному градиентному методу, но с оптимальным значением  $\gamma$  при настройке по критерию типа функционала интенсивности. Если информацию о положении приемника трудно получить, то целесообразно использовать алгоритм вида

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \frac{\hat{\gamma}}{J} \frac{\partial J}{\partial \Theta_n}. \quad (4.82)$$

В частности, для монотонного режима достижения оптимальных параметров достаточно выполнения условия

$$2\gamma/(1 + \alpha_{нл}) < 1, \quad (4.83)$$

которое не зависит от расстояния до приемника.

В заключение данного пункта отметим, что в ближайшее время необходимо проанализировать эффективность использования различных итерационных методов в задачах нелинейной адаптивной оптики. Предварительный анализ показывает, что использование алгоритмов, основанных на методе Ньютона, позволяет устранить многие имеющие алгоритмические трудности. В многоканальных системах, когда оператор  $\mathcal{L}$  не представим в виде диагональной матрицы, итерационный процесс целесообразно организовывать на основе метода Якоби для решения систем линейных уравнений.

## 5.5.

### Фокусировка световых пучков в системах с запаздыванием

Влияние запаздывания [7; 19; 48] на качество фокусировки световых пучков не вполне изучено, и поэтому многие вопросы еще ждут ответа. На некоторые из них можно ответить, используя безабберационное описание. Так, настройка адаптивной системы по критерию минимума ширины пучка происходит по закону

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \gamma \frac{\partial J_a}{\partial \Theta} = 2\gamma L(t - \tau_{zc})(1 - L(t - \tau_{zc})\Theta(t)) \quad (4.84)$$

в случае расположения приемника внутри керровской среды,

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \gamma \frac{\partial J_a}{\partial \Theta} = 2\gamma L(t - \tau_{zc})[1 + L(t - \tau_{zc})(\Theta_{нл}(t - \tau_{zc}) - \Theta(t))] \quad (4.85)$$

при его расположении за слоем среды. Отметим, что (4.84), (4.85) отражают наличие запаздывания в получении информации о состоянии среды и расстояния до приемника. Однако быстроедействие адаптивной системы достаточно для отработки оптимальных параметров оптического излучения, соответствующих данным значениям  $L(t)$  и  $\Theta_{нл}(t)$ .

Для наглядности анализа рассмотрим случай неподвижного приемника. Тогда отработка адаптивной системой оптимальной фокусировки происходит по закону

$$\Theta = 1/L + (\Theta_{нач} - 1/L)e^{-t/\tau_a} + \frac{1}{\tau_a} \int_0^t \Theta_{нл}(t - \tau_{zc})e^{-(t-\eta)/\tau_a} d\eta. \quad (4.86)$$

Если  $\tau_a \ll 1$ , то справедливо квазистатическое управление:

$$\Theta_{кв.ст} = 1/L + \Theta_{нл}(t - \tau_{zc}). \quad (4.87)$$

Следовательно, запаздывание в получении информации о состоянии среды приводит к неполному отслеживанию нелинейной расходимости светового импульса. В результате этого его ширина на приемнике за время приема сигнала увеличивается в

$$\gamma_{инт} = 1 + \int_0^{\tau_{нл}} (\Theta_{нл}(t - \tau_{zc}) - \Theta_{нл}(t))^2 dt \quad (4.88)$$

раз. В частности, для прямоугольного импульса (4.88) принимает вид

$$\gamma_{инт} = 1 + \alpha_{нл}^2 \tau_{zc}^2 \tau_{нл}. \quad (4.89)$$

Таким образом, нелинейность распространения приводит к квадратичному росту ширины пучка при увеличении его начальной мощности.

В случае гауссова пучка импульса увеличение ширины пучка с ростом  $\tau_{3c}$  имеет более сложный вид:

$$\eta_{\text{инт}} = 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \{ \Phi(\sqrt{2}(\tau_n - \tau_{3c})) + \Phi(\sqrt{2}\tau_n) - 2e^{-3\tau_{3c}^2/4} \Phi(\sqrt{2}(T - \tau_{3c}/2)) \}, \quad (4.90)$$

где  $\Phi(t)$  — функция ошибок. Из анализа (4.90) следует, что сначала увеличение задержки приводит к более быстрому по сравнению с (4.89) росту ширины пучка, а затем — медленному.

При наличии также запаздывания в выработке управляющего сигнала работа адаптивной системы по минимуму ширины пучка происходит по закону

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = -2\gamma L(t - \tau_{3c})(1 - L(t - \tau_{3c})\Theta(t - \tau_{3n})), \quad (4.91)$$

согласно которому изменение фокусировки со временем при  $L(t) = \text{const}$  осуществляется следующим образом:

$$\Theta = 1/L + (\Theta_{\text{нач}} - 1/L)e^{-t/\tau_a}. \quad (4.92)$$

Здесь функция  $p(\tau)$  является решением трансцендентного уравнения

$$p(\tau)e^{-\tau_{3n}p(\tau)/\tau_a} = 1. \quad (4.93)$$

Следовательно, для  $\tau_{3n} \ll \tau_a$   $p = e^{1 - \tau_{3n}/\tau_a}$ . Таким образом, запаздывание в выработке управляющего сигнала при неизменном положении приемника приводит к уменьшению быстродействия системы. В случае же динамического управления ( $L(t) = \text{const}$ ) будет иметь место также ухудшение качества компенсации.

При дискретном алгоритме управления отработка оптимальной фокусировки при минимизации ширины оптического излучения на мишени осуществляется по закону

$$\Theta_n = C_1 q_1^{n/N_0} + C_2 q_2^{n/N_0}, \quad q_i = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8\gamma L^2}}{2}, \quad (4.94)$$

$$n = lN_0, \quad l = 0, 1, 2, \dots; \quad C_1, C_2 = \text{const.}$$

Из (4.94) следует несколько важных для практики выводов. Во-первых, замедляется в  $N_0$  раз отработка оптимальной фокусировки. Во-вторых, изменяются условия устойчивой работы адаптивной системы. В-третьих, присутствуют две возможные

ветви отработки фокусировки. В-четвертых, появляется возможность возникновения осциллирующих режимов. Отметим, что для устранения члена  $q_1$  (или  $q_2$ ) из (4.94) необходимо специальным образом задать вторую итерацию.

При анализе непрерывного алгоритма управления целесообразно использовать аппарат теории исследования дифференциальных уравнений с запаздыванием, в частности теорему Хопфа [74]. Так, применяя результаты [74] к (4.91) при  $L(t) = \text{const}$ , получим, что система будет реализовывать колебательный режим отработки фокусировки, если

$$2\gamma L^2 \tau_{\text{зп}} > \pi/2. \quad (4.95)$$

Для критерия пиковой интенсивности вместо (4.95) имеем

$$\frac{2\gamma \tau_{\text{зп}}}{L^2(1+\alpha_{\text{нл}})^2} > \frac{\pi}{2}. \quad (4.96)$$

Таким образом, в системе с запаздыванием условия устойчивости аналогичным образом зависят от мощности пучка, расстояния до приемника, как и в случае дискретного алгоритма управления.

## 5.6.

### *Трехточечные алгоритмы [56]*

Построение и исследование эффективности адаптивного управления фокусировкой пучка по трехточечному алгоритму в настоящее время проведено лишь в [56]. Его целесообразно применять, когда нет информации о производной функционала. Данная ситуация реализуется, если на двух последовательных итерациях происходит значительное изменение критериев качества, а также может реализоваться при использовании алгоритмов, основанных на методе Ньютона, когда вторые производные заменяются разностными соотношениями. В связи с этим весьма актуальной является разработка алгоритмов управления, использующих информацию о значении критерия качества для вычисления разностного аналога производной функционала.

Рассмотрим сначала фокусировку пучка в кубической среде при настройке адаптивной системы по критерию  $J_a$  (ширины пучка на приемнике). В этом случае (4.20) принимает вид

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n(1 - \sigma) + \sigma\Theta_{n-1} - \gamma L^2(\Theta_n + \Theta_{n-1} - 2/L). \quad (4.97)$$

Важно подчеркнуть два обстоятельства: во-первых, оптимальное значение фокусировки не зависит от значения параметра  $\sigma$ ; во-вторых, при  $\sigma = \gamma L^2$  управление фокусировкой в анализируемом здесь случае аналогично управлению при наличии информации о производной функционала и справедливы все полученные выше результаты. Для других значений параметра  $\sigma$  достижение оптимальной фокусировки возможно при определенном

выборе  $\Theta_1$ , в противном случае реализуется либо бистабильный, либо расходящийся режим. Подчеркнем, что в дальнейшем предстоит более детально рассмотреть особенности автофокусировки световых пучков по критериям пиковой интенсивности и построить алгоритм таким образом, чтобы устранить влияние разности функционала на процесс адаптации.

При динамической компенсации дополнительной расходимости светового пучка качество управления зависит от скорости изменения  $\Theta_{нл}$  трех последовательных итерациях:

$$\Delta_n \Theta_{нл} = \sigma \Theta_{нл}(n-1) + (1-\sigma) \Theta_{нл}(n) - \Theta_{нл}(n+1).$$

Заметим, что в толстом нелинейном слое при приближении фокуса к положению приемника происходит «срыв» монотонного процесса фокусировки, а ее максимально возможная точность определяется скоростью изменения нелинейной расходимости:

$$\Delta_n \Theta = L(\alpha_{нл}(n) - \alpha_{нл}(n-1))/2 \quad (4.98)$$

и связана непосредственно с быстроедействием системы.

В случае выполнения (4.98) система станет обрабатывать значение  $\Theta=0$ . Если  $(\alpha_{нл}(n) - \alpha_{нл}(n-1))/(\Theta_n - \Theta_{n-1})$  на каком-либо шаге имеет отрицательное значение, то адаптивная система фокусирует пучок за приемник на расстоянии, равном обратной величине данного отношения, а для противоположного неравенства — ближе сечения, в котором он находится. Поэтому после некоторого числа итераций процесс отработки фокусировки, по-видимому, будет бистабильным, если изменения  $\alpha_{нл}(n)$  происходят с равной скоростью, и стохастичным, если изменения  $\alpha_{нл}(n)$  происходят случайно, например из-за турбулентности атмосферы. Отметим, что сформулированная особенность компенсации нестационарного самовоздействия не зависит от значения параметра  $\sigma$ .

Для устранения зависимости качества компенсации от начального значения фокусировки в ряде случаев (при наличии ограничений или перемещении приемника) целесообразно в правую часть (4.97) добавить слагаемое  $\bar{\lambda} \Delta_n \Theta / (\Theta_n - \Theta_{n-1})$  и специальным образом выбирать  $\bar{\lambda}$ , например из условия

$$\bar{\lambda} \Theta_n = (L_n^2 - L_{n-1}^2)(1 + \alpha_{нл}) \quad (4.99)$$

или аналогичного условия для других критериев качества. Реально выбирать  $\bar{\lambda}$  следует исходя из требования монотонности адаптации. Точно так же организовывается управление при компенсации нелинейной расходимости светового импульса. Естественно, что в этом случае (4.99) изменится. Подчеркнем, что при таком выборе  $\bar{\lambda}$  адаптация при управлении по закону (4.20) будет совпадать с коррекцией нелинейных искажений при наличии информации о градиенте функционала. Если  $\bar{\lambda}$  от-



личается от значения, полученного в (4.99), то ошибка в обработке волнового фронта допускается значительно меньше, чем при оптимизации только по алгоритму (4.20).

## § 6.

### АБЕРРАЦИОННЫЕ ЗЕРКАЛА

Как уже отмечалось, одним из основных вопросов адаптивной оптики является вопрос о необходимом числе степеней свободы (мод в случае гибких зеркал). В общем случае рассчитать зависимость критерия качества от числа компенсируемых аберраций можно на основе численных экспериментов. Однако для тонкого нелинейного слоя во многих случаях удается построить аналитическую зависимость функционала ширины пучка на приемнике от числа степеней свободы зеркала.

#### 6.1.

##### Компенсация регулярных искажений

При прохождении оптическим излучением тонкого нелинейного слоя минимальная ширина пучка на мишени, расположенной в сечении  $l$  за слоем среды, достигается при распределении начального волнового фронта, равного

$$S_y = -\Theta(x^2 + y^2) - S_{\text{нл}}, \quad (4.100)$$

$S_{\text{нл}} = \frac{l\alpha}{2ka^2} \varepsilon_{\text{нл}}$ . Следовательно, нужно подобрать коэффициенты  $\Theta_{pq}$  в (4.23) так, чтобы реализовать распределение (4.100).

Используя формальную аналогию между уравнением квазиоптики и уравнением Шредингера для движения свободной частицы в двумерном случае, можно получить [26; 64] следующие соотношения:

$$\begin{aligned} X(L) &= \frac{L}{2Q^2} \iint f^2 \tilde{S}'_x dx dy; \quad \langle x^2 \rangle_L = \langle x^2 \rangle_0 + \\ &+ \frac{L^2}{4Q^2} \iint (f'_x)^2 dx dy + \frac{L}{2Q^2} \iint f^2 \left( 2x \tilde{S}'_x + \frac{L}{2} (\tilde{S}'_x)^2 \right) dx dy; \\ \langle r^2 \rangle_L &= \langle r^2 \rangle_0 + \frac{L^2}{4Q^2} \int_0^\infty (f'_r)^2 r dr + \frac{L}{2Q^2} \int_0^\infty f^2 \left( 2\tilde{S}'_r + \right. \\ &\left. + \frac{L}{2} (\tilde{S}'_r)^2 \right) r dr, \end{aligned} \quad (4.101)$$

где  $\tilde{S} = S_{\text{нл}} + S_y + \Theta(x^2 + y^2)$ , а среднее значение  $\langle \hat{G} \rangle$  оператора  $\hat{G}$  понимается соответственно в смысле

$$\langle \hat{G} \rangle_L = \iint A^*(\hat{G}A) dx dy / Q^2, \quad \langle \hat{G} \rangle_L = 2\pi \int_0^\infty A^*(\hat{G}A) r dr / Q^2.$$

Здесь  $A$  — решение линейного уравнения. Причем  $\langle \hat{G} \rangle_0$  берется по комплексной амплитуде оптического излучения, прошедшего тонкий слой нелинейной среды:

$$f(x, y) \exp(-i\tilde{S}(x, y)).$$

В случае распространения аксиально-симметричного гауссова  $f_r(r) = e^{-r^2}$  или трубчатого  $f_r(r) = \sqrt{2} r^2 e^{-r^2}$  пучков, разлагая распределение волнового фронта по полиномам Лагерра, получим

$$d^2(L) = \begin{cases} 1 + L^2 + 4L \left( -b_1 + L \sum_{p \geq 1} b_p^2 p \right), & f_r, \\ 3 + 4L^2 + 2L \left( -6b_1 + L \sum_{p \geq 1} b_p^2 p(p+1)(p+2) \right), & f_r. \end{cases} \quad (4.102)$$

Здесь  $b_p$  — коэффициенты разложения  $\tilde{S}(r)$ . Подставляя в (4.102)  $b_p = \Theta_p + C_p$ , где  $C_p$  — коэффициенты разложения  $S_{\text{нл}}$ , получим, что минимальная ширина пучка на мишени достигается при

$$\Theta_1 = \frac{1}{2L} - C_1, \quad \Theta_p = -C_p, \quad p \geq 2.$$

Заметим, что волновой фронт разлагается по степеням  $2r^2$ , и поэтому в выражении для  $\Theta_1$  в знаменателе присутствует коэффициент 2. Если адаптивная система компенсирует  $M_0$  первых аберраций, то  $d^2(L)$  равна

$$d^2(L) = L^2 \begin{cases} 1 + 4 \sum_{p=M_0+1}^{\infty} p C_p^2, & f_r, \\ 2 + \sum_{p=M_0+1}^{\infty} C_p^2 p(p+1)(p+2), & f_r. \end{cases} \quad (4.103)$$

В случае отсутствия аксиальной симметрии будем использовать разложение по полиномам Эрмита. Тогда величина

$$d^2(L) = 2(\langle x^2 \rangle_L + \langle y^2 \rangle_L - \langle x \rangle_L^2 - \langle y \rangle_L^2)$$

определяется через коэффициенты разложения  $b_{pq}$  следующим образом:

$$d^2(L) = 1 + L^2 + 2L \left[ 4b_{20} + 4b_{02} + L \sum_{p+q \geq 1} b_{pq}^2 2^{p+q} p! q! (p+q) \right], \quad f_r \quad (4.104)$$

в случае распространения гауссова пучка. Нетрудно видеть, что оптимальные условия распространения оптического излучения реализуются при следующих значениях коэффициентов:

$$\Theta_{20} = -\frac{1}{8L} - C_{20}, \quad \Theta_{02} = -\frac{1}{8L} - C_{02}, \quad \Theta_{pq} = -C_{pq}, \quad (4.105)$$

а размер пучка при компенсации  $M_0$  первых aberrаций равен

$$d^2(L) = L^2 \left( 1 + 2 \sum_{p+q > M_0}^{\infty} C_{pq}^2 2^{p+q} (p+q) p! q! \right). \quad (4.106)$$

Используя приведенные выше соотношения, нетрудно рассмотреть компенсацию конкретных нелинейностей: керровской, тепловой при различных условиях на трассе, что сделано в цитированных выше работах. Здесь остановимся на результатах численных экспериментов в толстом слое. Отметим, что в литературе имеется много работ, посвященных численному моделированию фокусировки гауссовых пучков (см., например, [6; 28; 77] и др.). Цель же изложенных результатов — продемонстрировать зависимость критерия качества от числа компенсируемых aberrаций при различных значениях трассы распространения, профиля пучка и размера приемной апертуры. В качестве базисных функций выбирались функции (4.26).

Оптимизация коэффициентов  $\Theta_p$  осуществлялась в два этапа: сначала оптимизация  $\Theta_p$  проводилась статистическим методом, а затем полученные значения уточнялись градиентным методом. В качестве примера на рис. 8 представлены результаты численных расчетов, проведенных для гауссова (рис. 8, а, в) и трубчатого (рис. 8, б, г) пучков при распространении в средах с кубической нелинейностью (рис. 8, а, б) и стационарной тепловой дефокусировкой (рис. 8, в, г) для  $\alpha = -400$ . Расстояние до мишени  $R_a = 0,34$ . Заметим, что трасса нормирована на величину  $2ka^2$ .

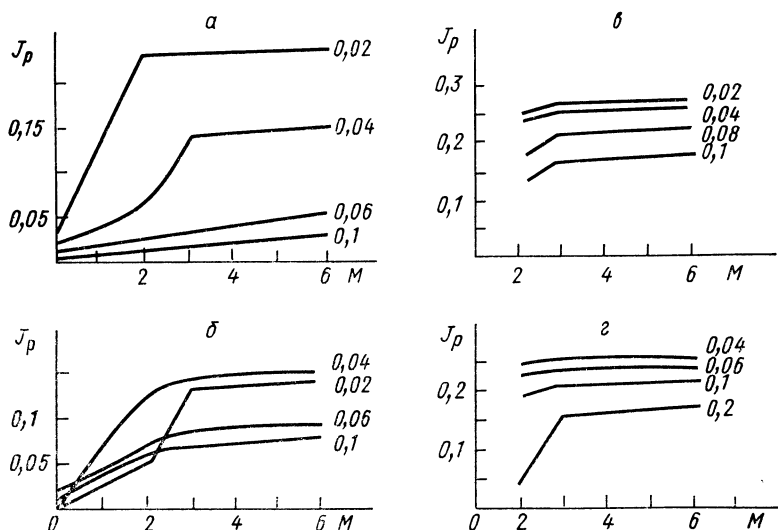


Рис. 8. Зависимость принимаемой мощности  $J_p$  пучка от числа компенсируемых aberrаций  $M_0$  при его распространении в керровской (а, б) и тепловой (в, г) дефокусирующей среде. Трасса распространения указана на рисунке

Как следует из рисунков, число требуемых aberrаций для заданного значения  $\alpha$  определяется трассой и начальным профилем пучка. Так, при распространении гауссова пучка в кубической среде на трассе  $z=0,02$  достаточно использовать зеркало, способное обрабатывать только фокусировку пучка. Если  $z=0,04$ , то необходимо использовать первую aberrационную моду. При дальнейшем увеличении расстояния  $z=0,06 \div 0,1$  эффективная компенсация имеет место при использовании зеркал, способных обрабатывать четыре низших aberrационных моды.

Аналогичные результаты имеют место при распространении трубчатого пучка. Однако если для трасс  $z \leq 0,04$  профилирование оптического излучения приводит к незначительному увеличению ( $z=0,04$ ) либо к уменьшению, то для трасс  $z=0,06$  и  $z=0,1$  имеет место соответственно двух- и трехкратное увеличение  $J_p$  по сравнению со значением, достигаемым при распространении первоначально гауссова пучка. Это обстоятельство связано с тем, что в процессе распространения трубчатый пучок трансформируется в гауссов с пиковой интенсивностью, примерно равной начальной, а затем расплывается.

В случае тепловой дефокусировки гауссова пучка (рис. 8, в) для малых трасс распространения достаточно высокая эффективность компенсации может быть достигнута фокусировкой оптического излучения ( $z \leq 0,04$ ), а при увеличении расстояния до мишени  $z > 0,06$  достаточно использовать гибкое зеркало, способное обрабатывать низшую aberrационную моду. Профилирование пучка приводит к увеличению концентрации мощности на приемнике, расположенном на расстоянии  $z \sim 0,1$ , почти в 1,5 раза.

При компенсации тепловой дефокусировки в движущейся среде в качестве базисных функций использовались круговые полиномы Цернике  $Z_p^q$ . В этом случае волновой фронт записывается в виде

$$S_y(r, \varphi) = \Theta_{00} + \sum_{p=1}^3 \Theta_{30} Z_{2p}^0 + \sum_{p=1}^3 \sum_{q=1}^p \Theta_{pq} Z_p^q(r) \cos(p\varphi), \quad (4.107)$$

причем оптимизация  $\Theta_{pq}$  проводилась статистическим методом. Для выяснения влияния высших aberrаций в разложении (4.107) оптимизировались 8, 9, 10 и 7 коэффициентов для  $\alpha = -40$ . Отметим, что для 0,02 подключение aberrаций приводит к существенному увеличению принимаемой мощности. Так, при  $\bar{R}_a = 0,14$   $J_p$  при  $M_0 = 10$  увеличивается в 2,6 раза по сравнению со значением для  $M_0 = 7$ , при  $\bar{R}_a = 1,4$  — в 1,3 раза. В случае увеличения расстояния до приемника выигрыш в эффективности оптимизации уменьшается. Например, при  $\bar{R}_a = 0,14$  принимаемая мощность при  $M_0 = 10$  в 1,2 раза больше соответствующего значения при  $M_0 = 7$ .

При увеличении расстояния до мишени  $z = 0,06 \div 0,08$  для рассматриваемых апертур радиусом  $0,14 \leq \bar{R}_a \leq 1,4$  максимальная

Таблица 1

Зависимость принимаемой мощности в апертуру  $R_a=0,7$  (а),  $0,14$  (б) от числа абберационных мод  $M_0$  гауссова пучка: Норма распределения  $Q=0,5$

| а                    |      |      |      |      |      | б                    |      |      |      |      |      |
|----------------------|------|------|------|------|------|----------------------|------|------|------|------|------|
| $M_0 \backslash J_p$ | 7    | 8    | 9    | 10   | z    | $M_0 \backslash J_p$ | 7    | 8    | 9    | 10   | z    |
| $10^2$               | 6,33 | 6,87 | 7,52 | 9,06 | 0,02 | $10^3$               | 3,13 | 3,66 | 4,88 | 8,86 | 0,02 |
| $10^2$               | 9    | 11,6 | 12   | 12   | 0,04 | $10^3$               | 7,37 | 8,44 | 9,22 | 11   | 0,04 |
| $10^2$               | 10,6 | 14   | 14,1 | 14,5 | 0,06 | $10^3$               | 7,62 | 13,3 | 13,5 | 13,5 | 0,06 |
| $10^2$               | 11,2 | 11,7 | 11,9 | 11,9 | 0,08 | $10^3$               | 6,2  | 6,6  | 6,78 | 6,9  | 0,08 |

концентрация мощности достигается при  $M_0=8$  (отношение значений  $J_p$  при  $M_0=8$  и  $M_0=7$  составляет примерно  $1,05 \div 1,06$ ). Для  $z=0,1$  максимальная эффективность реализуется при  $M_0=7$ .

В качестве иллюстрации в табл. 1 представлены результаты оптимизации коэффициентов  $\Theta_{pq}$  для  $R_a=0,7; 1,4$ . Важно подчеркнуть, что вывод, сделанный в ряде работ [6; 22; 28], о достаточной эффективности управления низшими абберациями справедлив не всегда: он имеет место для определенных трасс распространения, если радиус приемной апертуры примерно равен начальному радиусу пучка.

## 6.2.

### Компенсация случайных искажений [79]

Компенсации случайных искажений оптического излучения в линейной и нелинейных средах посвящены соответственно работы [1; 4] и [3; 6; 8; 27] и др. Здесь мы покажем, что на основе изложенного в настоящем параграфе подхода можно сделать ряд важных выводов [79].

Пусть световой пучок проходит слой среды, вносящий как регулярные  $S_p$ , так и случайные  $S_\Phi$  фазовые искажения. Тогда  $S=S_y+S_p+S_\Phi$ . Для краткости введем следующие функционалы:  $\varphi_1(S)=X(L)$ ,

$$d^2 = \frac{L^2}{4Q^2} \iint ((f'_x)^2 + (f'_y)^2) dx dy;$$

$$\varphi_{20, 02}(S) = \iint f^2(x, y) \left\{ \begin{array}{l} x S'_x / \langle x^2 \rangle_0 \\ y S'_y / \langle y^2 \rangle_0 \end{array} \right\} dx dy / 2Q^2, \quad (4.108)$$

$$R_0(S) = \iint f^2(x, y) [(S'_x)^2 + (S'_y)^2] dx dy / Q^2$$

и будем анализировать выражения только для  $\langle x \rangle_L$  и  $J_{\text{цх}} = X^2(L)$ , ( $\langle y \rangle_L$ ;  $J_{\text{цу}}$  легко получаются из  $\langle x \rangle_L$ ,  $J_{\text{цх}}$  с помощью формальной замены  $x \rightarrow y$ ,  $\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}$  и т. д.). Проводя усреднение в (4.108) и учитывая независимость  $S_y$  от  $S_\phi$ , получим следующие выражения для среднего квадрата радиуса и положения центра пучка, среднего квадрата его отклонения от центра приемника:

$$\langle \overline{X} \rangle_L = \overline{\varphi_1(S_p)}, \quad \overline{J_{\text{цх}}} = (\overline{\varphi_1(S_p)} - X_0)^2 + \overline{\varphi_1^2(S_\phi)}, \quad (4.109)$$

$$\begin{aligned} d^2(L) = d^2 + \langle x^2 \rangle_0 (1 + 2L\varphi_{20}(\overline{S_p})) + \langle y^2 \rangle_0 (1 + 2L\varphi_{02}(\overline{S_p})) + \\ + \frac{L^2}{4} \left( R_0(\overline{S_p}) - \sum_{1,2} \overline{\varphi_{1,2}^2(S_p)} + R_0(\overline{S_\phi}) - \sum_{1,2} \overline{\varphi_{1,2}^2(S_\phi)} \right). \end{aligned}$$

Напомним, что индекс 2 относится к оси  $y$ ,  $\overline{S_p} = S_p + S_{\text{пл}}$ .

Из (4.109) можно сделать следующие выводы: во-первых, среднее положение центра тяжести светового пучка не зависит от  $S_\phi$ , во-вторых, каждая из величин  $\overline{J_{\text{цх}}}$ ,  $\overline{J_{\text{цу}}}$ ,  $\overline{d^2(L)}$  представляет собой сумму слагаемых, зависящих либо от регулярной, либо от флуктуирующей составляющей. При этом последняя во всех случаях приводит к дополнительному уширению пучка и блужданию его центра тяжести. Еще один важный вывод состоит в том, что алгоритм компенсации регулярных искажений по критериям минимума  $\overline{J_{\text{цх}}}$ ,  $\overline{J_{\text{цу}}}$ ,  $\overline{d^2(L)}$  не зависит от  $S_\phi$ , но флуктуирующая составляющая определяет степень достижимой компенсации.

Рассмотрим ряд примеров. Пусть  $S_\phi$  — гауссова случайная величина с функцией корреляции

$$S_\phi(x, y) S_\phi(x', y') = \sigma^2 \exp \left[ - \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{\rho_k^2} \right],$$

где  $\rho_k = r_k/a$ ,  $r_k$  — радиус корреляции,  $\sigma$  — дисперсия флуктуаций. Тогда среднее значение квадрата ширины гауссова и трубчатого пучков при полной компенсации регулярных искажений равно

$$\overline{d^2(L)} = L^2 + 2L^2\sigma^2 \frac{(2 + \rho_k^{-2})}{\rho_k^4(1 + \rho_k^{-2})^2} \begin{cases} 1, & f_r, \\ \frac{1}{4(1 + \rho_k^{-2})^2}, & f_t, \end{cases}$$

Таблица 2

Зависимость ширины пучка на приемнике при фиксированных  $\sigma$  и  $L$  от числа компенсируемых aberrаций и радиуса корреляции

| $\begin{matrix} M_0 \\ c_K \end{matrix}$ | 1     | 2     | 3     | 4      | 5      | 6     | 7      |
|--|-------|-------|-------|--------|--------|-------|--------|
| 0,5                                      | 3,84  | 3,6   | 3,28  | 2,92   | 2,6    | 2,3   | 2      |
| 0,6                                      | 2,58  | 2,3   | 1,97  | 1,67   | 1,39   | 1,14  | 0,92   |
| 0,7                                      | 1,82  | 2,06  | 1,22  | 0,96   | 0,73   | 0,55  | 0,41   |
| 0,8                                      | 1,33  | 1,03  | 0,78  | 0,55   | 0,39   | 0,266 | 0,1875 |
| 1  | 0,75  | 0,5   | 0,312 | 0,187  | 0,11   | 0,06  | 0,035  |
| 1,5                                      | 0,231 | 0,098 | 0,04  | 0,0151 | 0,0053 | —     | —      |

а для  $\overline{J_{\text{цх}}}$  имеем

$$\overline{J_{\text{цх}}} = \frac{L^2}{4} \left( \Theta_{10} + \frac{\Theta_{\text{нл}}}{Q^4} \iint f^4 dx dy - \frac{2x_0}{L} \right) + \overline{\Phi_1^2(S_\Phi)}.$$

Следовательно, блуждание центра пучка определяется свойствами случайной величины и его профилем. Отметим еще, что  $R_0(S_\Phi)$  не зависит от профиля пучка, но в выражение для его ширины входит также  $\overline{\Phi_{1,2}^2(S_\Phi)}$ . Сравнивая вклад в уширение и смещение центра пучка величины нелинейности и флуктуаций, можно выбрать для данных условий оптимальный профиль и очередность компенсации.

Отметим, что дифракционный предел при полном устранении нелинейных искажений в турбулентной среде увеличивается в  $1 + \sigma^2 \rho_K^{-4} (2 + \rho_K^{-2}) / (1 + \rho_K^{-2})^2$  раз, а дисперсия смещения центра тяжести пучка из-за флуктуаций фазы равна

$$\overline{\Phi_1^2(S_\Phi)} = L^2 \sigma^2 \begin{cases} \rho_K^2 / (2(1 + \rho_K^2)^2), & f_r, \\ \rho_K^2 (1 + 2\rho_K^2) / (1 + 4\rho_K^2)^4, & f_T. \end{cases}$$

В результате этого при полной компенсации регулярных искажений интенсивность на приемнике уменьшается по сравнению

со случаем отсутствия случайных флуктуаций в следующее число раз:

$$\eta = 1 + \frac{\sigma^2(1+2\rho_K^2)}{\rho_K^2(1+\rho_K^2)^2} \exp \left\{ \frac{\rho_K^4 \sigma^2}{2(\rho_K^2(1+\rho_K^2)^2 + 2\sigma^2(1+2\rho_K^2))} \right\}.$$

Рассмотрим эффективность управления при частичной компенсации случайной составляющей. Одним из наиболее важных вопросов, представляющих интерес для адаптивной оптики, является модовый состав флуктуаций и их дисперсия. Для определения последней представим флуктуирующую составляющую в виде ряда по полиномам Эрмита. Тогда

$$S_\Phi(x, y) = \sum_{p, q} b_{pq} H_p(\sqrt{2} x) H_q(\sqrt{2} y) \quad (4.110)$$

и для дисперсии  $\sigma_{pq}$  случайных коэффициентов  $b_{pq}$  разложения  $S_\Phi$  имеем

$$\sigma_{pq}^2 = b_{pq}^2 = \frac{\sigma^2 (2p)! (2q)! \rho_K^2}{(p!)^3 (q!)^3 2^{3(p+q)} (1+\rho_K^2)^{1+p+q}}. \quad (4.111)$$

Из (4.111) можно сделать несколько важных выводов. Во-первых, дисперсия отдельных мод определяется величиной  $\sigma^2 \rho_K^2 / (1+\rho_K^2)$ . Во-вторых, с ростом номера моды  $\sigma_{pq}^2$  быстро убывают. Поэтому реальный вклад в уширение пучка и блуждания его центра тяжести оказывают только низшие моды. Их число определяется отношением радиуса корреляции к радиусу пучка.

Представляет интерес анализ корреляции коэффициентов  $b_{pq}$ . Можно показать, что для нее справедливо следующее выражение:

$$K_{pp'qq'} = \overline{b_{pq} b_{p'q'}} = \frac{\sigma^2 \rho_K^2 (p+p')! (q+q')!}{(2^{3/2} (1+\rho_K^2)^{1/2})^{p+p'+q+q'}}, \quad (4.112)$$

$$\frac{T_{pp'} T_{qq'}}{p! p'! q! q'!} \left( \left( \frac{p+p'}{2} \right)! \left( \frac{q+q'}{2} \right)! \right)^{-1},$$

где функции  $T_{pp'}$ ,  $T_{qq'}$  равны либо 0, либо 1 и определяются следующим образом:

$$T_{pp'} = (\chi(p))^{(p+p')/2} \delta(\chi(p), \chi(p')), \quad (4.113)$$

$$\chi(p) = \begin{cases} 1, & p=2m \\ -1, & p=2m+1 \end{cases}, \quad \delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y, \\ 0, & x \neq y. \end{cases}$$

Аналогичное выражение имеет место для  $T_{qq'}$ . Существенно, что четные и нечетные моды между собой не коррелируют. Это дает возможность отдельно осуществлять коррекцию наклонов и фо-



кусировки. Из (4.112) также следует, что с ростом номера моды функция корреляции быстро уменьшается.

Перейдем теперь к анализу эффективности работы адаптивной системы, способной обрабатывать первые  $M_0$  случайных и  $M$  регулярных aberrации. В этом случае для квадрата ширины первоначально гауссова пучка справедлива формула

$$d^2(L) = d^2 + 2L^2 \left( \sum_{M > p+q > M_0+1} C_{pq}^2 p!q!(p+q)2^{p+q} + \sum_{p+q > M+1} (b_{pq} + C_{pq})^2 2^{p+q} p!q!(p+q) \right), \quad (4.114)$$

где  $C_{pq}$  — коэффициенты разложения  $S_{нл}$  по полиномам Эрмита (считаем, что система компенсирует также наклон). Усредняя (4.114) с учетом  $\overline{S_\Phi} = 0$  и используя (4.111), получим

$$\overline{d^2(L)} = d^2 + 2L^2 \left( \sum_{p+q > M+1} C_{pq}^2 p!q!(p+q)2^{p+q} + \sum_{p+q > M_0+1} \overline{b_{pq}^2} 2^{p+q} p!q!(p+q) \right). \quad (4.115)$$

Из (4.115) следует, что  $\overline{d^2(L)}$  определяется некомпенсированными случайными и регулярными aberrациями, причем вклад их не зависит друг от друга, а к оптимальным значениям управляющих коэффициентов при коррекции нелинейных искажений добавляются случайные  $b_{pq}$ . Отметим, что при компенсации  $M_0$  случайных aberrаций минимально достижимая ширина гауссова пучка равна

$$\overline{d^2(L)} = L^2 \left( 1 + \frac{2\sigma^2(1 + \rho_K^2(1 + M_0))}{\rho_K^2(1 + \rho_K^2)^{M_0+1}} \right).$$

Значение величины

$$d_{L\sigma}^2 = \frac{2\sigma^2(1 + \rho_K^2(1 + M_0))}{\rho_K^2(1 + \rho_K^2)^{M_0+1}},$$

которая при фиксированных  $\sigma$ ,  $L$  определяет ширину пучка на приемнике, представлено в табл. 2. Заметим, что в первом приближении число необходимых компенсируемых aberrаций может быть оценено по формуле

$$M_0 = 1 + \frac{\ln \rho_K^2}{\ln(1 + \rho_K^2)}.$$

Более точную оценку в зависимости от трассы распространения и дисперсии флуктуаций нетрудно получить из выражения  $\overline{d^2(L)}$ . Из таблицы и написанных выше выражений следует важный вывод (см. также [67; 80]), что число компенсируемых aberrаций

сильно зависит от отношения радиуса корреляции к радиусу пучка и быстро возрастает при уменьшении  $\rho_k$ . Для  $\rho_k$  порядка 1 управление по низшим модам является эффективным. Именно этот случай моделировался в [27].

Компенсация только случайной фокусировки пучка приводит к уменьшению ширины пучка в следующее число раз:

$$\eta = (1 + \rho_k^2) \frac{(1 + \rho_k^2)^2 \rho_k^2 + 2\alpha^2(1 + 2\rho_k^2)}{(1 + \rho_k^2)^3 \rho_k^2 + 2\alpha^2(1 + 3\rho_k^2)}. \quad (4.116)$$

Таким образом, для  $\rho_k \ll 1$  в первом приближении  $\eta = 2$ .

### 6.3.

#### *Динамическая компенсация*

Рассмотрим некоторые особенности компенсации случайных искажений световых пучков на примере управления фокусировкой  $\Theta$ . Соответствующую составляющую (см. (4.110)) флуктуаций обозначим через  $\Theta_\Phi$ . Тогда отработка  $\Theta$  при настройке адаптивной системы по минимуму ширины пучка осуществляется по закону

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\tau_a} (1/L + \Theta_{нл} + B_\Phi(t) - \Theta), \quad (4.117)$$

где  $B_\Phi(t)$  — регистрируемое случайное значение  $\Theta_\Phi$ . Учитывая инерционность системы, для  $B_\Phi$  нетрудно получить следующее уравнение:

$$\tau_{ин} \frac{dB_\Phi}{dt} + B_\Phi = \Theta_\Phi(t - \tau_{зп}). \quad (4.118)$$

Аналогичное (4.118) уравнение справедливо для  $S_\Phi$ . Отметим, что модель (4.117), (4.118) позволяет оценить влияние конечно-быстродействия адаптивной системы на качество компенсации.

В случае идеальной системы  $\tau_{ин} = \tau_{зп} = 0$  из (4.117), (4.118) следует, что для достаточно малой постоянной времени установления отработка фокусировки пучка происходит по закону

$$\Theta(t) \cong 1/L + \Theta_{нл} + \Theta_\Phi - \tau_\alpha \frac{\partial \Theta_\Phi}{\partial t}.$$

В результате этого среднее значение ширины пучка на приемнике будет равно

$$\overline{d^2(L)} = L^2 \left( 1 + \tau_\alpha^2 \left( \overline{\frac{\partial \Theta_\Phi}{\partial t}} \right)^2 \right). \quad (4.119)$$

Предполагая, что  $S_\Phi$  — стационарная случайная величина, из (4.119) получим

$$\overline{d^2(L)} = L^2(1 + (\tau_a/\tau_k)^2 \sigma_{20}^2), \quad (4.120)$$

где  $\tau_k$  — время корреляции гауссова закона. Из сравнения (4.120) со значением ширины пучка при компенсации только регулярных искажений  $d^2(L) = L^2(1 + \sigma_{20}^2)$  можно записать условие эффективности отслеживания  $\Theta_\Phi$ :

$$\tau_a < \tau_k. \quad (4.121)$$

Физически (4.121) означает, что за время управления кривизна случайной линзы должна измениться незначительно. В противном случае управление неэффективно: вырабатываемая адаптивной системой фокусировка запаздывает относительно  $\Theta_\Phi$ .

Следует заметить, что данная ситуация аналогична в некотором смысле случаю управления волновым фронтом на перемещающийся приемник, поэтому целесообразно использовать алгоритмы с переменным  $\gamma$ . При дискретном алгоритме управления можно записать аналогичное (4.121) условие, которое будет означать, сколько итераций успевают сделать система за время изменения  $\Theta_\Phi$ .

В заключение отметим, что численное моделирование компенсации нелинейных искажений в турбулентной среде выполнялось также в [81].

## § 7.

### ПОДОБИЕ И ВОПРОСЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАМЕТРАМИ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ

#### 7.1.

##### Линейная среда

При моделировании процессов, происходящих в линейной среде, теория подобия позволяет ограничиться минимальным числом расчетов, а именно достаточно один раз рассчитать уравнения, которые записаны в безразмерной (критериальной) форме. Эти параметры получили название  $\pi$ -комплексов или критериев подобия.

Переход от пучка с плоским волновым фронтом и радиусом  $a_1$  к пучку радиуса  $a_2$  означает, что соответствующее значение амплитуды поля  $A$  достигается в точках  $x_1 = \chi a_1$ ,  $x_2 = \chi a_2$  физического пространства. При изменении пиковой амплитуды излучения  $E_0$  для получения нового значения амплитуды достаточно умножить  $A$  на  $E_0$ .

При нелинейном распространении световых пучков ситуация несколько усложняется. Однако и в этом случае теория подобия может эффективно использоваться.

## 7.2. Керровская нелинейность

Для наглядности запишем здесь уравнение, описывающее распространение световых пучков в кубичной среде:

$$\frac{\partial A}{\partial L} + \frac{i}{4} \Delta_{\perp} A - i\alpha_{\text{нл}} |A|^2 A = 0.$$

В данном случае  $\pi$ -комплексами будут величины  $L$ ,  $x$ ,  $y$  (или  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  при наличии аксиальной симметрии). Следовательно, два процесса дифракции будут подобными, если совпадают значения  $\alpha_{\text{нл}}$ , одинаковы начальные распределения амплитуды и наблюдения ведется в точках с одинаковыми значениями  $L$ ,  $r$ . Поведение амплитуды  $E_i(L, r)$  пучка подобно поведению безразмерной амплитуды  $A_i(L, r)$  при постоянном значении  $\alpha_{\text{нл}}$  и постоянной апертуре излучателя (постоянном значении  $a$ ). Это означает, что результаты одного численного счета описывают широкий класс процессов дифракции с различными параметрами пучка и среды.

На примере оптимизации ширины пучка при фиксированных других параметрах, в частности начальной мощности  $P_0$ , рассмотрим применение для этой цели методов теории подобия. Для критерия пиковой интенсивности  $J_I$ , используя определение мощности пучка  $P_0 = cn_0 a^2 E_0^2 Q^2 / 4$ , нетрудно показать справедливость следующего соотношения:

$$J_I = |\bar{A}(L, 0, 0)|^2 = |A(L, 0, 0)|^2 E_0^2 = |A(L, 0, 0)|^2 \frac{c n_0 Q^2 \bar{z}}{2 P_0 k L}, \quad (4.122)$$

где  $\bar{A}$ ,  $\bar{z}$  — соответственно размерные амплитуда пучка и координата. Из (4.122) видно, что  $J_I$  явно зависит от значения начальной ширины пучка (или  $L$ ). В случае непосредственного расчета зависимости  $J_I$  от  $a$  необходимо для каждого  $a$  решать квазиоптическое уравнение. Однако если (4.122) умножить на  $L$ , то получим величину, явно не зависящую от  $a$ . При этом данная величина пропорциональна интенсивности излучения на оси пучка. Поэтому для определения оптимального значения  $L_{\text{опт}}$  (или  $a_{\text{опт}}$ , так как  $\bar{z}$  фиксировано и изменение  $L$  соответствует изменению  $a$ ) достаточно в процессе решения уравнения квазиоптики построить зависимость от  $L$  величины  $L|A(L, 0, 0)|^2$ . Ее максимум определяет значения  $J_I$ ,  $L_{\text{опт}}$  и, следовательно,  $a_{\text{опт}} = (2L/kL_{\text{опт}})^{1/2}$ .

Рассмотрим теперь задачу об оптимизации начальной ширины пучка с целью достижения максимального значения принимаемой мощности  $J_p$  в апертуре радиуса  $\bar{R}_a = R_a/a$ :

$$J_p = \int_0^{\bar{R}_a} |A(L, r)|^2 r dr. \quad (4.123)$$

Как и в предыдущем случае, критерий явно зависит от  $a$ , поэтому для оптимизации непосредственно использовать (4.123) нецелесообразно. Будем использовать преобразования с целью сокращения расчетов

$$\begin{aligned} J_p &= \int_0^{\bar{R}_a} |A(L, r)|^2 r dr = a^{-2} \int_0^a |\bar{A}(L, \bar{r})|^2 \bar{r} d\bar{r} / E_0^2 = \\ &= \frac{cn_0 Q^2}{4P_0} \int_0^a |\bar{A}(L, \bar{r})|^2 \bar{r} d\bar{r} = \frac{cn_0 Q^2}{4P_0} P_R. \end{aligned} \quad (4.124)$$

Здесь  $P_R$  — мощность принимаемого излучения в физических единицах,  $r$  — поперечная координата физического пространства.

Таким образом, при постоянной начальной мощности пучка  $P_0$  (критерий подобия  $\alpha_{нл}$ ) от  $a$  явно зависит только  $\bar{R}_a$ . Эту зависимость можно исключить, воспользовавшись связью координаты  $r$  с начальной шириной пучка:

$$\bar{R}_a = R_a / a = R_a \sqrt{L} \sqrt{\frac{k}{2z}} = \sqrt{L(2z/kR_a^2)} = \sqrt{L/z_R}. \quad (4.125)$$

После подстановки  $\bar{R}_a$  в (4.124) видно, что критерий качества

$$J_p = \int_0^{\sqrt{L/z_R}} |A(L, r)|^2 r dr \quad (4.126)$$

не зависит явно от начальной ширины пучка, и для определения  $L_{\text{опт}}$  в процессе решения необходимо вычислять интеграл с переменным верхним пределом. Таким образом, в данном случае можно также ограничиться однократным решением. Отметим, что запись (4.126) позволяет рассчитать не только зависимости принимаемой мощности от начальной ширины пучка  $a$ , но и одновременно ее зависимости от радиуса приемной апертуры.

Часто качество компенсации нелинейных искажений оптического излучения оценивают по значению ширины пучка  $d(L)$ , которую определяют с помощью второго момента распределения интенсивности:

$$J_a = d^2(L) = \int_0^\infty |A(L, r)|^2 r^3 dr / Q^2. \quad (4.127)$$

Для наглядности рассмотрим осесимметричный случай. Выразив  $d^2(L)$  через физические параметры, получим связь между размерной шириной пучка  $a_n(L)$  и ее нормированным значением:

$$d^2(L) = a_n^2(L) \frac{cn_0 Q^2 k}{3P_0 z} L. \quad (4.128)$$

Чтобы исключить явную зависимость  $d^2(L)$  от  $a$  (или  $L$ ), необходимо  $d^2(L)$  разделить на  $L$ . Полученное выражение будет пропорционально размерной ширине. Таким образом, для определения оптимального значения  $a$  необходимо определить минимум функции  $d^2(L)/L$ .

Подчеркнем, что все три рассмотренные здесь характеристики светового пучка  $J_I$ ,  $J_P$ ,  $J_a$  можно вычислить одновременно. Однако при изменении  $\alpha_{\text{нл}}$  (или  $f(r)$ ) необходимо заново решать квазиоптическое уравнение.

### 7.3.

#### *Тепловое самовоздействие*

Аналогичные зависимости можно построить и в случае теплового самовоздействия. В случае стационарного теплового самовоздействия уравнение имеет вид

$$\frac{\partial A}{\partial L} + \frac{i}{4} \Delta_{\perp} A - i \alpha_{\text{нл}} T A = 0, \quad \Delta_{\perp} T = -|A|^2, \quad (4.129)$$

а нормированное изменение температуры среды связано с ее размерным значением соотношением

$$\bar{T} = \delta P_0 T / (\chi Q^2), \quad \alpha_{\text{нл}} = P_0 / LP_{\tau}, \quad P_{\tau} = \frac{n_0 \chi Q^2}{\partial k \bar{z} (\partial n / \partial T)}. \quad (4.130)$$

В (4.129) коэффициент  $\alpha_{\text{нл}}$  зависит как от начальной ширины, так и от мощности пучка. Поэтому нужно изменить предыдущий алгоритм определения оптимального значения  $a$  таким образом, чтобы, во-первых, выбранный критерий качества явно не зависел от  $L$ , во-вторых, при проведении расчетов значение  $\alpha_{\text{нл}}$  оставалось постоянным, хотя  $L$  будет изменяться. Последнему требованию можно удовлетворить, если соответствующие значения функционалов откладывать вдоль лучей, выходящих из начала координат, на плоскости  $\{L, P_0/P_{\tau}\}$ : вдоль этих лучей значение  $\alpha_{\text{нл}}$  остается постоянным. Заполняя затем эту плоскость лучами, получим зависимости критериев качества от начальной мощности пучка и его ширины. Преимущество данного метода, получившего название лучевого метода теории подобия, заключается в том, что плоскость оптимизируемых параметров заполняется по лучам, и это значительно сокращает число необходимых расчетов. Для получения зависимости выбранного функционала от одного из параметров достаточно провести соответствующие сечения.

Построим критерии качества, явно не зависящие от параметров  $a$ ,  $P_0$ . Из (4.121) следует, что функционал  $J_I$  зависит от  $a$  и  $P_0$ . Умножив  $J_I$  на  $L^2$ , получим величину, пропорциональную  $|A(L, 0, 0)|^2 / \alpha_{\text{нл}}$  (см. (4.121)). Очевидно, что величина  $J_I L^2 \alpha_{\text{нл}}$  пропорциональна интенсивности пучка на оси и явно не зависит

от его начальной мощности и ширины. Следовательно, для нахождения оптимальных значений  $a$ ,  $P_0$  необходимо в процессе решения безразмерных уравнений, описывающих тепловое самовоздействие оптического излучения, откладывать вдоль лучей значения  $\alpha_{\text{нл}} L^2 J_I$  на плоскости  $\{L, P_0/P_T\}$ . Тангенс угла наклона лучей к оси  $L$  равен  $\alpha_{\text{нл}}$ . Затем, соединив точки равных значений функционала, нетрудно получить оптимальные значения  $P_0/P_T$ ,  $L_{\text{опт}}$ .

В случае критерия принимаемой мощности  $J_p$  необходимо умножить на  $\alpha_{\text{нл}} L$ . В результате получим величину, пропорциональную мощности, причем от  $a$  будет зависеть только верхний предел интегрирования. Для устранения этой зависимости необходимо вдоль лучей откладывать величину

$$J_p = \alpha_{\text{нл}} L \int_0^{\sqrt{L/z_R}} |A(L, r)|^2 r dr \quad (4.131)$$

— интеграл с переменным верхним пределом. Отметим, что при исследовании зависимости  $d^2(L)$  от  $L$  по описанной выше методике на плоскости  $\{L, P_0/P_T\}$  необходимо строить, как это непосредственно следует из (4.128), линии уровней величины  $\alpha_{\text{нл}} d^2(L)/L$ .

При наличии движения среды параметр  $\alpha_{\text{нл}}$  выражается через характеристики пучка и среды следующим образом:

$$\alpha_{\text{нл}} = P_0 / \sqrt{L} P_T, \quad P_T = \frac{2^{3/2} \rho_c p Q^2 V}{\delta k^{3/2} (\partial n / \partial T)},$$

где  $V$  — скорость движения среды. В данном случае, используя лучевой метод теории подобия, оптимизацию  $a$  и  $P_0$  необходимо проводить, выполняя построения на плоскости  $\{\sqrt{L}, P_0/P_T\}$ . Так, в случае функционала пиковой интенсивности необходимо строить линии уровней величины  $\alpha_{\text{нл}} L^{3/2} |A(L, 0, 0)|^2$ , для критерия  $J_p$  соответствующие построения выполняются для  $\alpha_{\text{нл}} \sqrt{L} J_p$ , а при минимизации ширины пучка необходимо использовать функцию  $\alpha_{\text{нл}} d^2(L) / \sqrt{L}$ .

## § 8.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ЗАМЕЧАНИЯ

Сделаем несколько замечаний относительно результатов исследований, которые не вошли в настоящую главу, и сформулируем еще некоторые проблемы, которые, на наш взгляд, необходимо решить в ближайшее время.

Как следует из вышеизложенного, в настоящей главе мы рассмотрели различные подходы моделирования работы адаптивных систем и методы оптимизации параметров световых пучков, на основе которых нетрудно решить конкретные задачи.

Основное внимание было уделено алгоритмической части адаптивного управления, от которой в конечном счете зависит качество компенсации. При этом мы не ставили целью привести все результаты, полученные с помощью моделей, построенных на безабберационном описании распространения пучка либо на основе приближения тонкого нелинейного слоя: их можно найти в цитируемых работах. Не приведены также многочисленные результаты расчетов на ЭВМ, которые подтвердили все выводы, сделанные на основе упрощенных подходов описания нелинейного распространения световых пучков: они содержатся как в оригинальных работах, так и в [73].

Из не вошедших в данную главу результатов отметим работы, посвященные профилированным (гипергауссовым, гипертрубчатым и т. д.) световым пучкам [75; 76; 78; 85—89]. Как показывает анализ, профилированные пучки испытывают значительно меньшие нелинейные искажения (а в ряде случаев и случайные искажения) по сравнению с гауссовыми пучками. Однако, во-первых, здесь имеется еще ряд вопросов, связанных с областью их эффективного применения и с их устойчивостью по отношению к начальным возмущениям, а также с устойчивостью профиля при нелинейном распространении (без возмущений). Во-вторых, самовоздействие этих пучков и компенсация их нелинейных искажений представляют самостоятельный интерес и их целесообразно рассмотреть отдельно.

Не приведены также результаты по формированию волновых фронтов гибкими зеркалами [48; 90; 91]. Несмотря на достигнутый прогресс в моделировании этих зеркал, в настоящее время много нерешенных проблем, связанных с их использованием. Основными являются проблема размещения приводов на зеркале, проблема устранения немонотонной зависимости критерия качества от оптимизированных параметров, проблема уменьшения числа степеней свободы. Устранение немонотонной зависимости наиболее целесообразно осуществлять методами регуляризации, т. е. с использованием функционала, характеризующего отклонение формы зеркала от первоначального невозмущенного состояния.

Из имеющихся в настоящее время проблем одной из наименее изученных является фокусировка световых пучков сегментированными зеркалами. В этом случае в начальном распределении амплитуды светового пучка образуются узкие провалы, так как сегменты при поворотах не прилегают плотно друг к другу. Моделирование распространения таких пучков даже в линейной среде пока практически отсутствует. Вопросы теоретического анализа здесь близки к вопросам, возникающим при рассмотрении гибких зеркал. Однако численное моделирование включает также некоторые специфические особенности: например, требования к численным методам. Проведенные нами численные эксперименты показывают, что сохранение инварианта полной мощности не является достаточным условием утверждения о



правильности расчетов. Необходимо выполнение других законов сохранения. Существенно их сохранение в процессе не только распространения пучка, но и при изменении шагов сеток (более детальное рассмотрение будет дано в работах, находящихся в настоящее время в печати).

В заключение отметим, что для выяснения эффективности оптимизации параметров светового пучка необходим комплексный анализ влияния различных механизмов нелинейности. Другое замечание сделаем относительно работ [77; 81; 82—84], которые не упоминались выше. В работах [81—83] моделировалась адаптивная фазосопрягающая система и, как отмечалось выше, было показано, что даже при слабых нелинейностях отсутствует сходимость алгоритма фазового сопряжения. В [83; 84] рассматривались некоторые особенности оптимизации просветления облачной среды.

И наконец, еще раз подчеркнем, что имеются многочисленные вопросы в организации адаптивного управления (выбор алгоритма, способ осуществления обратной связи и т. д.). Здесь по существу только математическое моделирование способно дать быстрый и правильный ответ.

---

# Литература

## К главе 1

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
2. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С. Нестационарные явления и пространственно-временная аналогия в нелинейной оптике // ЖЭТФ. 1968. Т. 55, вып. 4. С. 1439—1447.
3. Ахманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. М.: Наука, 1981.
4. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М.: Наука, 1979.
5. Ахманов С. А., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики. М.: ВИНТИ. 1964.
6. Алешкевич В. А., Сухоруков А. П. Об отклонении мощных световых пучков под действием ветра // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12, № 2. С. 112—114.
7. Сухоруков А. П., Шумилов Э. Н. Нелинейные искажения сканируемых световых пучков // Квантовая электроника. 1979. Т. 6, № 5. С. 986—1002.
8. Сухоруков А. П., Хохлов Р. В., Шумилов Э. Н. Динамика просветления облаков лазерным пучком // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 14, № 4. С. 245—250.
9. Сухоруков А. П., Шумилов Э. Н. Просветление полидисперсного тумана // Журнал технической физики. 1973. Т. 43, № 5. С. 1029—1039.
10. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Просветление движущейся жидкокапельной среды мощным оптическим излучением с учетом теплового самовоздействия // Труды II Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в дисперсной среде. Т. 2. Обнинск, 1982. С. 59—62.
11. Егоров К. Д., Кандидов В. П., Пентегова Л. И., Прахов М. С. Распространение пучка ИК излучения в потоке полидисперсного водного аэрозоля // Квантовая электроника. 1985. Т. 12, № 9. С. 1825—1833.
12. Гордин М. П., Садовников В. П., Стрелков Г. М. О повышении просветляющей способности лазерного пучка в атмосфере // Радиотехника и электроника. 1983. Т. 28, № 7. С. 1257—1261.
13. Nitzan A., Ross J. // J. of Chemical Physics. 1973. V. 59, N 1, P. 28—35.
14. Кашин Ю. А., Филиппев А. Б. // Химическая физика. 1984. Т. 3. С. 853—860.
15. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. Термохимическая бистабильность и химические фазовые переходы, стимулированные лазерным излучением // Квантовая электроника. 1984. Т. 11, № 6. С. 1183—1198.
16. Алимов Д. Т., Едвабный И. В., Лукьянчук Б. С., Хабибулаев П. К. Бистабильность при лазерном нагреве химически активных сред // Квантовая электроника. 1984. Т. 11, № 5. С. 923—932.
17. Пименов В. П., Скачков А. Н. Особенности макрокинетики газофазных лазерохимических процессов // Химическая физика. 1986. Т. 5, № 3. С. 324—331.

18. Бонч-Бруевич А. М., Либенсон М. Н. Нерезонансная лазерохимия в процессах взаимодействия интенсивного излучения с веществом // Известия АН СССР. Сер. физическая. 1983. Т. 46, № 6. С. 1104—1118.
19. Байков Э. У., Башкин А. С., Ораевский А. Н. Влияние энергетического разветвления в реакции фторирования водорода на характеристики  $H_2$ — $F_2$ -лазера // Квантовая электроника. 1984. Т. 11, № 5. С. 1026—1032.
20. Бутылкин В. С., Каплан А. Е., Хронополо Ю. Г., Якубович Е. И. Резонансные взаимодействия света с веществом. М.: Наука, 1977.
21. Гора В. Д., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. // Квантовая электроника. 1980. Т. 7, № 4. С. 720—728.
22. Гора В. Д., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. Исследование различных режимов самофокусировки при одно- и двухфотонном резонансах в пассивной и активных средах // Известия АН СССР. Сер. физическая. 1981. Т. 45, № 6. С. 983—988.
23. Большов Л. А., Кириченко Т. К., Фаворский А. П. Численный анализ дифракционной неустойчивости  $2\pi$ -импульсов света // ДАН СССР. 1978. Т. 243, № 3. С. 622—625.
24. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966.
25. Букаускас Г. А., Кабелка В. И., Пискаркас А. С., Стабинис А. Ю. Особенности трехфотонного параметрического взаимодействия сверхкоротких световых пакетов в нелинейном режиме усиления // Квантовая электроника. 1974. Т. 1, № 3. С. 522—527.
26. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. Нелинейное взаимодействие дифрагирующих световых пучков в средах с квадратичной нелинейностью. Препринт ИПМ. 1974. № 43.
27. Азимов Б. С., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Сухорова А. К. О генерации волн на суммарной и разностной частотах короткими импульсами в диспергирующих средах. Препринт ИМП. 1978. № 78.
28. Азимов Б. С., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Сухорова А. К. О нелинейном преобразовании частоты пикосекундных импульсов // Квантовая электроника. 1979. Т. 6, № 12. С. 2642—2644.
29. Азимов Б. С., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Сухорова А. К. Взаимодействие слабых импульсов с низкочастотной волной большой интенсивности в диспергирующих средах // ЖЭТФ. 1980. Т. 78, вып. 1. С. 81—93.
30. Азимов Б. С., Карамзин Ю. Н., Сухорова А. К. Влияние фазовой модуляции накачки и сигнала на параметрическое преобразование частоты вверх. Препринт ИПМ. 1981. № 36.
31. Азимов Б. С., Карамзин Ю. Н., Сухорова А. К. Новые эффекты при параметрическом преобразовании частоты вверх: нелинейно-дисперсионное распыление и квазисолитоны // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1981. Т. 45, № 8. С. 1398—1402.
32. Гринь Ю. Г., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. О продольном нарушении синхронизма при генерации второй гармоники непрерывного излучения // Квантовая электроника. 1977. Т. 4, № 10. С. 2276—2279.
33. Михина Т. В., Сухоруков А. П., Томов И. В. Влияние тепловых воздействий на протекание оптических процессов // Журнал прикладной спектроскопии. 1971. Т. 15, № 6. С. 1001—1007.
34. Лазерные системы / Под ред. В. П. Чеботаева. Новосибирск: Наука, 1980.
35. Келих С. Молекулярная нелинейная оптика. М.: Наука, 1981.
36. Кандидов В. П., Шленов С. А. Законы распределения светового поля, распространяющегося в среде с кубической нелинейностью // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1986. Т. 50, № 6. С. 1191—1195.
37. Выслоух В. А., Чередник И. В. Моделирование самовоздействия сверхкоротких импульсов в волоконных световодах методом обратной задачи рассеяния // ДАН СССР. 1986. Т. 289, № 2. С. 336—340.

38. Кандидов В. П. Исследование статистики оптических полей в нелинейных средах методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1986. Т. 47, № 8. С. 1583—1589.
39. Алешкевич В. А., Лебедев С. С., Матвеев А. Н. Самовоздействие некогерентного светового пучка // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 5. С. 1090—1094.
40. Алешкевич В. А., Лебедев С. С., Матвеев А. Н. Преобразование пространственной статистики частично когерентного светового пучка в нелинейной среде // ЖЭТФ. 1982. Т. 83. № 4. С. 1249—1255.
41. Чиркин А. С., Юсупов Д. Б. О нелинейных оптических процессах в слоистых средах // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1981. Т. 45, № 6. С. 929—933.
42. Гора В. Д., Пустовой В. И., Сухоруков А. П., Сухорукова А. К. Генерация разностной частоты вблизи поляритонного резонанса // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1983. Т. 47, № 8. С. 1622—1626.
43. Ростовцева В. В., Салтиел С. М., Сухоруков А. П., Тункин В. Г. Генерация высших оптических гармоник в сфокусированных пучках // Квантовая электроника. 1980. Т. 7, № 5. С. 1081—1088.
44. Трофимов В. А., Юсупов Д. Б. Взаимодействие дифрагирующих световых пучков в слоистых средах // Оптика и спектроскопия. 1985. Т. 58, № 4. С. 908—910.
45. Трофимов В. А., Трошин В. В. Математическое моделирование и численные методы для задач оптической термохимии в газах // Математические модели и вычислительные методы. Изд-во Моск. ун-та, 1987. С. 75—85.

#### *К главе 2*

1. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. Cooley J. W., Tukey J. W. An Algorithm for machine computation of complex Fourier series // Math. Comp. 1965. V. 19. P. 297—301.
3. Fleck J. A., Morris J. R., Feit M. J. Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere // Applied Phys. 1976. V. 10, N 2. P. 129—160.
4. Christiansen J. P., Jlockney R. W. FOUR 67. a fast Fourier transform package // Computer Phys. Commun. 1971. V. 2, N 3. P. 127—138.
5. Карамзин Ю. Н. Разностные схемы для расчета трехчастотных взаимодействий квазимонохроматических волн с учетом дифракции // ЖВМ и МФ. 1975. Т. 15, № 2. С. 439—445.
6. Карамзин Ю. Н. О разностных схемах для расчетов трехчастотных взаимодействий электромагнитных волн в нелинейной среде с квадратичной поляризацией // ЖВМ и МФ. 1974. Т. 14, № 4. С. 1058—1062.
7. Карамзин Ю. Н., Цветкова И. Л. О сходимости спектрального метода решения одной задачи нелинейной оптики // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 1. С. 235—240.
8. Карамзин Ю. Н., Цветкова И. Л. Спектральный метод решения нелинейных квазиоптических задач. Препринт ИПМ. 1979. № 115.
9. Карамзин Ю. Н. Численные методы для некоторых задач нелинейной оптики. Препринт ИПМ. 1982. № 73.
10. Карамзин Ю. Н. Разностные методы в задачах нелинейной оптики. Препринт ИПМ. 1982. № 74.
11. Захарова И. Г., Карамзин Ю. Н. Разностный метод решения задачи о внутрирезонаторной генерации второй оптической гармоники. Препринт ИПМ. 1983. № 136.
12. Захарова И. Г., Карамзин Ю. Н. Численное моделирование процесса внутрирезонаторного удвоения частоты оптического излучения // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 7. С. 1213—1221.
13. Захарова И. Г., Карамзин Ю. Н., Трофимов В. А. Численные методы для задач распространения оптического излучения в облачной среде. Препринт ИПМ. 1984. № 114.

14. Захарова И. Г., Карамзин Ю. Н., Трофимов В. А. Численное исследование самовоздействия трубчатых волновых пучков. Препринт ИПМ. 1984. № 140.
15. Захарова И. Г., Карамзин Ю. Н., Трофимов В. А. Разностные методы в задачах распространения оптического излучения в облачной среде // Дифференциальные уравнения. 1985. Т. 21, № 7. С. 1186—1191.
16. Захарова И. Г., Карамзин Ю. Н., Трофимов В. А. Численный метод о распространении светового импульса в неоднократно движущейся нелинейной поглощающей среде. Препринт ИПМ. 1986. № 22.
17. Карамзин Ю. Н., Конев Ю. Б. Численное исследование работы неустойчивых телескопических резонаторов с учетом дифракции и эффекта насыщения в активной среде. Препринт ИПМ. 1974. № 57.
18. Карамзин Ю. Н., Трофимов В. А. Разностные методы для некоторых задач распространения оптического излучения в химически активной среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Выч. мат. 1987. № 2. С. 29—36.
19. Абаляев М. А., Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Ляхов Г. А. Решение на ЭВМ задачи о встречном нелинейном взаимодействии трех оптических волн // Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. С. 148—157.
20. Абрашин В. Н., Афанасьев А. А., Дриц В. В., Урбанович А. И. Светоиндуцированная дифракция излучения в средах с кубической нелинейностью. Препринт Института физики АН БССР. 1981. № 244.
21. Амосов А. А., Валадинский В. Д., Жилейкин Я. М., Злотник А. Л. Описание набора программ для решения уравнения распространения световой волны // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 4. С. 1074—1076.
22. Бахвалов Н. С., Жилейкин Я. М., Заболотская Е. А. Нелинейная теория звуковых пучков. М.: Наука, 1982.
23. Боголюбов А. Н., Свешников А. Г. Обоснование конечно-разностного метода расчета оптических волноводов // ЖВМ и МФ. 1979. Т. 19, № 6. С. 1496—1505.
24. Гулин А. В. Трехслойные разностные схемы для нестационарных уравнений Шредингера // ЖВМ и МФ. 1974. Т. 14, № 6. С. 1488—1498.
25. Дегтярев Л. М., Крылов В. В. Гидродинамическое описание самофокусировки пучков света в кубичной среде // Изучение гидродинамической неустойчивости численными методами. Изд. ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. М., 1980. С. 108—161.
26. Дегтярев Л. М., Крылов В. В. Метод численного решения задач динамики волновых полей с особенностями // ЖВМ и МФ. 1977. Т. 17, № 6. С. 1523—1530.
27. Горбушина Т. А., Дегтярев Л. М., Крылов В. В. О формировании собственного оптического волновода в среде с насыщением нелинейности. Препринт ИПМ. 1978. № 114.
28. Горбушина Т. А., Дегтярев Л. М., Крылов В. В. Метод численного решения задач динамики волновых полей с особенностями. Препринт ИПМ. 1976. № 51.
29. Дриц В. В. Разностные схемы для расчета встречного нелинейного взаимодействия трех оптических волн // Изв. АН БССР. 1983. № 1. С. 11—15.
30. Дышко А. Л. Разностный метод решения уравнения распространения светового луча в нелинейной среде // ЖВМ и МФ. 1968. Т. 8, № 1. С. 238—242.
31. Дышко А. Л. Разностный метод решения уравнения распространения светового луча в нелинейной среде с учетом комбинационного рассеяния // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 6. С. 1408—1410.
32. Егоров К. Д., Кандидов В. П., Леденев В. И. Вариационно-разностные схемы в задаче самовоздействия световых пучков // ЖВМ и МФ. 1982. Т. 22, № 2. С. 382—389.
33. Кандидов В. П., Чесноков С. С., Выслоух В. А. Метод конечных элементов в задачах динамики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

34. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
35. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // ЖВМ и МФ. 1969. Т. 9, № 4. С. 953—958.
36. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений магнитной гидродинамики // ЖВМ и МФ. 1970. Т. 10. № 4. С. 990—998.
37. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975.
38. Самарский А. А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1982.
39. Fleck J. A. A cubic spline method for wave equation of nonlinear Optics // J. of Comput. Physics. 1974. V. 16, N 4. P. 324—341.
40. Распространение лазерного пучка в атмосфере / Под ред. Д. Стробена. М.: Мир, 1981.
41. Коняев П. А. О сходимости модифицированного метода расщепления при решении квазиоптических задач // Труды VI Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Т. 3. Томск, 1981. С. 191—194.
42. Коняев П. А. Модификация метода расщепления для численного решения квазиоптических задач // Там же. С. 195—198.

### *К главе 3*

1. Гора В. Д., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. Адиабатическая модель резонансной двухфотонной самофокусировки и дефокусировки световых пучков // Квантовая электроника. 1980. Т. 7, № 8. С. 1748—1755.
2. Bjorkholm J. E., Ashkin A. Cw. Self-focusing and selftrapping of light in sodium vapor // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 32, N 4. P. 129—132.
3. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Шлегель Т. Разностные методы в нестационарных задачах прохождения излучения в средах с двухфотонным резонансом // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 7. С. 1213—1219.
4. MacCall S. L., Hahn E. L. Self-induced transparency // Phys. Rev. 1969. V. 183, N 2. P. 457—485.
5. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филиппук Т. С. О существовании трехчастотных солитонных решений во втором приближении теории дисперсии // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 3. С. 456—458.
6. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. Лазерная термохимия // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1982. Т. 46, № 6. С. 1150—1168.
7. Бункин Ф. В., Кириченко Н. А., Лукьянчук Б. С. Бифуркации, катастрофы и структуры в лазерной термохимии // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1985. Т. 49, № 6. С. 1054—1068.
8. Карамзин Ю. Н., Филиппук Т. С. О существовании параметрически связанных волноводов и солитонов при трехчастотном взаимодействии волн // ПМТФ. 1977. № 1. С. 47—52.
9. Калинин М. И., Трофимов В. А. О нелинейном распространении оптического излучения в химически активной среде // Оптика и спектроскопия. 1986. Т. 61, вып. 1. С. 182—184.
10. Захарова И. Г., Карамзин Ю. Н., Трофимов В. А. Нелинейное самовоздействие профилированного оптического излучения в облачной среде // Труды III Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в дисперсной среде. Т. 4. Обнинск, 1985. С. 38—41.
1. Гринь Ю. Г., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. Об изменении условий оптимальной фокусировки мощных лазерных пучков при удвоении частоты // Квантовая электроника. 1978. Т. 5. № 2. С. 460—462.
2. Гринь Ю. Г., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. Об интегралах движения нелинейного четырехчастотного взаимодействия // Квантовая электроника. 1977. Т. 4, № 3. С. 700—703.

13. Гринь Ю. Г., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. Нелинейная дифракционная теория мощных удвоителей частоты света: взаимофокусировка пучков, предельные к. п. д. Препринт ИПМ. 1976. № 136.
14. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966.
15. Сухоруков А. П., Титов В. Н., Трофимов В. А. Влияние регулярной оптической неоднородности кристалла и просветления его границ на эффективность удвоения частоты // Лазерные пучки. Изд-во Хабаровск. политехнич. ин-та, 1982. С. 23—30.
16. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филиппчук Т. С. Теория генерации второй гармоники короткими импульсами с учетом дисперсионных эффектов второго порядка. Препринт ИПМ. 1981. № 106.
17. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. О самозахвате световых пучков в параметрически связанные волноводы // Письма в ЖЭТФ. 1976. Т. 1, № 16. С. 737—741.

#### К главе 4

1. Воронцов М. А., Шмальгаузен В. И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985.
2. Беспалов В. И., Пасманик Г. А. Нелинейная оптика и адаптивные лазерные системы. М.: Наука, 1986.
3. Лукин В. П. Атмосферная адаптивная оптика. Новосибирск: Наука, 1986.
4. Харди Дж. У. Активная оптика: новая техника управления световым пучком // ТИИЭР. 1978. Т. 66, № 6. С. 31—85.
5. Адаптивная оптика / Под ред. Э. А. Витриченко. М.: Мир, 1980.
6. Атмосферная адаптивная оптика / Под ред. В. Е. Зуева // Изв. вузов. Физика. 1985. Т. 28, № 11. С. 3—121.
7. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Моделирование систем адаптивного управления волновым фронтом в нелинейных средах // Труды VIII Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Томск. Изд. Ин-та оптики атмосферы СО АН СССР, 1986. Ч. 2. С. 3—15.
8. Кандидов В. П., Чесноков С. С. Проблема оптимизации световых пучков при распространении в атмосфере // Там же. С. 16—30.
9. Бакут П. А., Киракосянц В. Е., Логинов В. А. Применение теории статистических решений к оптимизации алгоритмов адаптации оптических систем // Там же. Ч. 3. С. 55—74.
10. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Математическое моделирование задач нелинейной адаптивной оптики // Вычислительные методы в математической физике. Изд-во Моск. ун-та, 1986. С. 103—125.
11. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Математическое моделирование многопараметрических задач нелинейной адаптивной оптики // Методы математического моделирования, автоматизация обработки наблюдений и их применения. М.: Изд-во МГУ, 1986. С. 105—120.
12. Зуев В. Е., Коняев П. А., Лукин В. П. Минимизация тепловых искажений оптических пучков методами адаптивной оптики // Труды VIII Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Томск. Изд. Ин-та оптики атмосферы СО АН СССР, 1986. Ч. 3. С. 75—80.
13. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Оптимальное управление лазерными пучками в нелинейных средах // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1982. Т. 46, № 10. С. 1933—1938.
14. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Адаптивные системы автофокусировки оптического излучения в нелинейных средах // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1984. Т. 48, № 7. С. 1424—1429.
15. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Филиппчук Т. С. О новом классе связанных солитонов в диспергирующей среде с квадратичной нелинейностью // Вестник МГУ. Сер. Физика и астрономия. 1978. Т. 19, № 4. С. 91—98.
16. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Динамическая автофокусировка оптического излучения // Вест. Моск. ун-та Сер. Физика, астрономия. 1985. Т. 26, № 2. С. 50—55.

17. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Компенсация нелинейных искажений сканируемых световых пучков // Квантовая электроника. 1985. Т. 12, № 8. С. 1617—1627.
18. Трофимов В. А. К вопросу об управлении волновым фронтом оптического излучения, распространяющегося в движущейся с переменной скоростью среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия. 1984. Т. 25, № 1. С. 105—108.
19. Трофимов В. А. Об адаптивной автофокусировке в системах с запаздыванием // Оптика и спектроскопия. 1985. Т. 59, вып. 5. С. 1153—1155.
20. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. О компенсации нелинейных искажений оптического излучения // Квантовая электроника. 1984. Т. 11, № 4. С. 663—670.
21. Кожевникова И. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Об адаптивной фокусировке световых пучков в нелинейных средах // Оптика и спектроскопия. 1984. Т. 57, вып. 6. С. 1102—1104.
22. Трофимов В. А. Компенсация тепловой дефокусировки профилированного светового импульса при наличии ограничений на волновой фронт. Численный эксперимент // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия. 1987. Т. 28, № 5.
23. Сухоруков А. П., Тимофеев В. В., Трофимов В. А. О компенсации нелинейных искажений световых пучков при наличии ограничений на деформацию управляющего зеркала // Квантовая электроника. 1986. Т. 13. № 7. С. 1484—1495.
24. Трофимов В. А. Динамическое управление низшими модами волнового фронта светового пучка в нелинейной среде // Изв. вузов. Физика. 1987. № 4. С. 63—69.
25. Трофимов В. А. Управление волновым фронтом светового пучка в среде с релаксирующей нелинейностью // Автометрия. 1987. № 2. С. 29—34.
26. Сухоруков А. П., Тимофеев В. В., Трофимов В. А. Адаптивная фокусировка световых пучков гибкими зеркалами в нелинейных средах // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1984. Т. 48, № 7. С. 1400—1408.
27. Чесноков С. С. О структуре фазовых искажений световых пучков, распространяющихся в случайно-неоднородной и нелинейной среде // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1986. Т. 50, № 4. С. 796—798.
28. Выслоух В. А., Кандидов В. П., Чесноков С. С., Шленов С. А. Адаптивная фокусировка интенсивных световых пучков, распространяющихся в нерегулярных средах // Изв. вузов. Физика. 1985. № 11. С. 30—41.
29. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Кандидов В. П. и др. Тепловое самовоздействие световых пучков и методы его компенсации // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 1. С. 3—37.
30. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Оптимальное управление световыми пучками в нелинейных средах. М.: Знание. Математика и кибернетика. 1986. № 7.
31. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейных средах // УФН. 1967. Т. 93, № 1. С. 19—70.
32. Akhmanov S. A., Krindach D. P., Migulin A. V. et al. Self-Actions of Laser Beams // IEEE J. Quant. El. 1968. QE-4, N 10. P. 568—575.
33. Gebhart F. G., Smith D. C. Self-Induced Thermal Distortion in the near Field for a Laser Beam in a Moving Medium // IEEE J. Quant. El. 1971. V. QE-7, N 2. P. 63—73.
34. Смит Д. К. Распространение мощного лазерного излучения. Тепловое искажение пучка // ТИИЭР. 1977. Т. 65, № 12. С. 59—103.
35. Fleck J. A., Morris J. R., Feit M. D. Time-Dependent Propagations of High Energy Laser Beams through the Atmosphere // Applied Phys. 1976. V. 10, N 2. P. 129—160.
36. Егоров К. Д., Кандидов В. П. Нестационарное тепловое самовоздействие световых импульсов в движущейся среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1980. Т. 23, № 7. С. 801—808.



37. Воробьев В. В., Шеметов В. В. Численное исследование некоторых задач теплового самовоздействия лазерных пучков в атмосфере. Препринт ИФА. 1978. С. 47.
38. Литвак А. Г., Фрайман Г. М. Взаимодействие пучков встречных электромагнитных волн в прозрачной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1972. Т. 15, № 9. С. 1341—1349.
39. Зуев В. Е., Копытин Ю. Д., Кузиковский А. В. Нелинейные оптические эффекты в аэрозолях. Новосибирск: Наука, 1980.
40. Нерушев А. Ф., Семенов Л. П. Распространение светового пучка в испаряющейся жидкокапельной среде при наличии «ветровой» рефракции // Квантовая электроника. 1976. Т. 3, № 6. С. 1226—1232.
41. Волковичкий О. А., Седунов Ю. С., Семенов Л. П. Распространение интенсивного лазерного излучения в облаках. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
42. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Об отражении волновых пучков от экрана, расположенного в нелинейной среде // Изв. вузов. Радиофизика. 1983. Т. 26, № 1. С. 12—19.
43. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Оптимизация параметров оптического излучения для эффективного просветления облачной среды // Труды VI Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Т. 3. Томск, 1981. С. 187—191.
44. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Методы моделирования и оптимального управления в задачах нелинейного распространения оптических пучков // Труды II совещания по атмосферной оптике. Т. 3. Томск, 1980. С. 69—76.
45. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Оптимальное управление лазерным излучением в нелинейных средах // Труды IV Международной конференции «Лазеры и их применение». Лейпциг, ГДР, 1981. С. 9—10.
46. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Компенсация теплового самовоздействия с помощью гибкого зеркала // Труды XI Всесоюзной конференции «Когерентная и нелинейная оптика». Т. 2. Ереван, 1982. С. 820—821.
47. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Методы коррекции пучков лазерного излучения, распространяющихся в нелинейной атмосфере // Труды III Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в дисперсной среде. Т. 1. Обнинск, 1985. С. 18—21.
48. Васильев Ф. П., Сухоруков А. П., Трофимов В. А., Шамеева Т. Ю. Динамическая компенсация эффектов самовоздействия гибким зеркалом // Труды VIII Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Т. 3. Томск, 1986. С. 102—107.
49. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. Нелинейная адаптивная оптика // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1978. Т. 48, № 12. С. 2547—2559.
50. Зельдович Б. Я., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Обращение волнового фронта. М.: Наука, 1985.
51. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Чернега П. И. Подобие и вопросы оптимального управления при распространении волновых пучков в нелинейных средах. Препринт ИПМ. 1979. № 52.
52. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Сухорукова А. К., Чернега П. И. Теория подобия в нелинейных задачах дифракции волн // ДАН СССР. 1977. Т. 235. С. 564—569.
53. Карамзин Ю. Н., Цветкова И. Л. Об одном численном методе решения задачи о генерации второй гармоники с учетом тепловых самовоздействий. Препринт ИПМ. 1982. № 156.
54. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.
55. Соболев И. М., Статников Р. Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука, 1981.
56. Трофимов В. А. К проблеме адаптивного управления волновым фронтом светового пучка по отраженному сигналу // Изв. вузов. Радиофизика. 1987. Т. 30, № 4. С. 505—515.

57. Ковальчук Л. В., Родионов А. Ю., Шерстобитов В. Е. Численное моделирование внутрирезонаторной адаптивной системы // Квантовая электроника. 1983. Т. 10, № 8. С. 1564—1571.
58. Гринь Ю. Г., Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. Об изменении условий оптимальной фокусировки мощных лазерных пучков при удвоении частоты // Квантовая электроника. 1978. Т. 5, № 2. С. 460—462.
59. Арифжанов Б. С. и др. Генерация гармоник излучения многокаскадного неодимового лазера // Изв. АН СССР. Сер. физическая. 1981, Т. 45. № 8. С. 1389—1397.
60. Розанов Н. Н., Семенов В. Е. О формировании заданного профиля интенсивности излучения при управлении его фазой // Письма в ЖЭТФ. 1983. Т. 9, № 4. С. 1531—1534.
61. Матизен Ю. Э., Троицкий Ю. В. Получение негауссовых световых пучков в лазере с выходным зеркалом, имеющим плавную амплитудную неоднородность // Квантовая электроника. 1986. Т. 13, № 7. С. 1437—1441.
62. Суханов И. И., Троицкий Ю. В., Якушин С. В. Формирование лазерного пучка с кольцеобразным распределением интенсивности // Квантовая электроника. 1986. Т. 13, № 2. С. 433—434.
63. Мак А. А., Нилов Е. В., Русов В. А. Генерирование лазерных импульсов миллисекундной длительности с управляемым временным ходом интенсивности // ЖТФ. Т. 55, вып. 12. С. 2415—2417.
64. Сухоруков А. П., Тимофеев В. В., Трофимов В. А. Компенсация нелинейных искажений абберационными зеркалами // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 12. С. 1514—1524.
65. Сухоруков А. П., Трофимов В. А., Шамеева Т. Ю. О компенсации нелинейных искажений световых пучков абберационными зеркалами // Лазерные пучки. Хабаровск, 1985. С. 30—36.
66. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Мир, 1978.
67. Тараненко В. Г., Горохов Ю. Г., Романюк Н. С. Зеркала для адаптивных оптических систем // Зарубежная радиоэлектроника. 1982. № 8. С. 19—43.
68. Sato T. et all. Deformable 2-D Mirron using Multilayered electrostrictors // Applied Optics. 1982. V. 21, N 20. P. 3669—3672.
69. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.
70. Sukhorukov A. P. // Proc. of Intern. conf. and School „Laser and Applications“ Abstract. Bucharest, Romania, 1982. P. 66.
71. Саичев А. И. О связи статистических характеристик проходящей и отраженной волн в среде с крупномасштабными случайными неоднородностями // Изв. вузов. Радиофизика. 1978. Т. 21, № 9. С. 1290—1296.
72. Мигулин В. В., Медведев В. И., Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Основы теории колебаний. М.: Наука, 1978.
73. Трофимов В. А. Оптимальное и адаптивное управление параметрами светового пучка, распространяющегося в средах с нелинейным показателем преломления. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., МГУ, 1983.
74. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. М.: Мир, 1985.
75. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Оптимальное управление волновым фронтом и временным профилем оптического излучения, распространяющегося в нелинейной среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия. 1982. Т. 23, № 4. С. 18—21.
76. Сухоруков А. П., Тимофеев В. В., Трофимов В. А. О нелинейных искажениях трубчатых пучков в движущейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия. 1985. Т. 26, № 3. С. 55—58.
77. Чесноков С. С. О компенсации тепловой дефокусировки трехэлементным адаптивным зеркалом // Квантовая электроника. 1983. Т. 10, № 6. С. 1160—1165.
78. Трофимов В. А. Нелинейные искажения гипертрубчатых световых пучков // Изв. вузов. Радиофизика. 1985. Т. 28, № 5. С. 624—633.
79. Сухоруков А. П., Тимофеев В. В., Трофимов В. А. Прохождение светового пучка через тонкий слой с нелинейными и случайными

- фазовыми искажениями. Исследование возможностей компенсации // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 6. С. 667—674.
80. Pearson J. E. // Proc. SPIE. 1979. V. 179.
81. Шленов С. А. Анализ работы фазосопрягающей системы управления световым пучком в турбулентной атмосфере // Лазерные пучки. Хабаровск, 1985. С. 72—77.
82. Воронцов М. А., Чесноков С. С. Коррекция нелинейных искажений световых пучков оптической системой с обратной связью // Изв. вузов. Физика. 1980. № 10. С. 15—20.
83. Лебедев С. С. Фазовая компенсация нелинейной рефракции светового пучка в капельной среде // Квантовая электроника. 1986. Т. 13, № 4. С. 797—801.
84. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Численное моделирование просветления жидкокапельной среды мощным оптическим излучением // Труды ИЭМ. Оптика атмосферы. Вып. 31 (105). М.: Гидрометеиздат, 1983. С. 95—102.
85. Трофимов В. А. О нелинейных абберациях при самоотклонении светового пучка в движущейся среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. Физика, астрономия. 1983. Т. 24, № 2. С. 70—72.
86. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Нелинейные искажения гипергауссовых световых пучков // Изв. вузов. Радиофизика. 1984. Т. 27, № 10. С. 1292—1298.
87. Сухоруков А. П., Трофимов В. А. Нелинейные искажения профилированных лазерных пучков при различных механизмах самовоздействия // Труды VIII Всесоюзного симпозиума по распространению лазерного излучения в атмосфере. Т. 2. Томск, 1986. С. 65—71.
88. Трофимов В. А. Численное моделирование распространения оптического излучения в жидкокапельной среде // Радиотехника и электроника. 1986. Вып. 10. С. 1930—1938.
89. Захарова И. Г., Карамзин Ю. Н., Трофимов В. А. Нелинейные искажения эллиптических световых пучков // Квантовая электроника. 1987. Т. 14, № 9.
90. Сухоруков А. П., Трофимов В. А., Шамеева Т. Ю. О компенсации нелинейных искажений световых пучков адаптивным гибким зеркалом при различной геометрии управления // Квантовая электроника. 1985. Т. 12, № 2. С. 355—360.
91. Сухоруков А. П., Трофимов В. А., Шамеева Т. Ю. Управление световым пучком в нелинейной среде с помощью гибкого зеркала // Труды IX Всесоюзного симпозиума по дифракции и распространению волн. Т. 2. Тбилиси, 1985. С. 93.
-

Научное издание

*Карамзин Юрий Николаевич,  
Сухоруков Анатолий Петрович,  
Трофимов Вячеслав Анатольевич*

*МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ*

Зав. редакцией  
**Н. М. Глазкова**

Редактор  
**Р. А. Бунатян**

Художественный редактор  
**Ю. М. Добрянская**

Технический редактор  
**В. В. Макарова**

Корректоры  
**И. А. Мушникова,  
С. Ф. Будаева**

ИБ № 3269

---

|                         |   |                   |
|-------------------------|---|-------------------|
| Сдано в набор 17.01.89. | Подписано в печать 22.11.89.                |                   |
| Л-14363.                | Формат 60×90 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> . | Бумага офс. № 2.  |
| Гарнитура литературная. |   | Высокая печать.   |
| Усл. печ. л. 10,0.      |   | Уч.-изд. л. 9,74. |
| Тираж 2220 экз.         |   | Заказ 370         |
| Изд. № 545.             |   | Цена 2 руб.       |

---

Ордена «Знак Почета» издательство  
Московского университета.  
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7

---

Серпуховская типография  
Упрполиграфиздата Мособлисполкома  
Серпухов, пр. Мишина, д. 2/7

---

## УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Ознакомиться с планами Издательства Московского университета и оформить предварительный заказ можно в магазинах — опорных пунктах по изучению спроса:

*в Москве* — магазин № 110 «Университетская книжная лавка» (117296, Москва, Ломоносовский просп., 18);

*в Киеве* — магазин № 12 «Книги» (252001, Киев, Крещатик, 44);

*в Минске* — магазин № 29 «Центральный» (220050, Минск, Ленинский просп., 19);

*в Новосибирске* — магазин № 2 Академгородка (630090, Новосибирск, ул. Ильича, 6).

Жители других городов также могут оформить предварительный заказ в местных книжных магазинах.

Магазин № 93 «Книга — почтой» (117168, Москва, ул. Кржижановского, 14) принимает предварительные заказы и высылает литературу Издательства Московского университета наложенным платежом.

---

---

## ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!

Издательство Московского университета выпускает научный журнал «Вестник Московского университета» — авторитетное научное издание, отражающее тематику важнейших направлений теоретических исследований в МГУ. На его страницах печатаются статьи, посвященные методологическим и конкретным научным вопросам; освещается методика преподавания учебных дисциплин; публикуются материалы научных конференций и симпозиумов.

Подписка на журналы оформляется на общих условиях, указанных в «Каталоге советских газет и журналов». Все серии включены в раздел «Журналы центральные». Подписка принимается без ограничений всеми отделениями связи.

|   |                              |
|---|------------------------------|
| Серия 1. Математика                               | Индекс 70992 Цена 5 р. 40 к. |
| Механика  |                              |
| Серия 2. Химия                                    | Индекс 70993 Цена 6 р. 00 к. |
| Серия 3. Физика.                                  | Индекс 70994 Цена 5 р. 70 к. |
| Астрономия  |                              |
| Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика | Индекс 71016 Цена 2 р. 80 к. |

---

---

**В 1990 ГОДУ  
В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ВЫХОДИТ КНИГА**

**Гончарский А. В., Степанов В. В., Попов В. В.**  
Введение в компьютерную оптику: Учеб. пособие.—  
М.: Изд-во МГУ, 1990. — 20 л.

Учебное пособие посвящено применению современных методов математической физики при исследовании обратных задач оптики и смежных областей, в частности оптики лазеров. Подробно изучаются математические модели, используемые при решении обратных задач, даны как классические, так и новые нетрадиционные постановки. Особое внимание уделено обоснованию численных методов, их эффективной реализации на современной вычислительной технике.

Для студентов вузов по специальности «прикладная математика».

---



---

**В 1990 ГОДУ  
В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ВЫХОДИТ КНИГА**

**Смирнов В. А.** Перенормировка и асимптотические разложения фейнмановских амплитуд. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 15 л.

Монография посвящена современной теории R-операции, ориентированной на применение в вычислениях в квантовой хромодинамике и других квантовополевых моделях. Изложение ведется на примере перенормировочных схем, наиболее часто применяемых на практике. Значительное внимание уделяется асимптотическим разложениям S-матрицы, составных полей и их произведений. Эти разложения позволяют описать поведение функций Грина в различных асимптотических режимах больших импульсов и (или) масс. С использованием техники R-операций выводятся явные и наиболее простые формулы для коэффициентов разложений. В книге учтены оригинальные работы последних лет.

Для физиков, интересующихся современными проблемами квантовой теории поля.

---

Цена 2 руб.